DINÁMICAS PRIMALES

Un Nuevo Enfoque para el Conjunto D de Números Primos

MG. Jonathan Rangel Castaño

Unidad Regional de Cabildo Indígena Piendamó

2025

Dinámicas Primales

Un Nuevo Enfoque para el Conjunto $\mathbb{D}$ de Números Primos

MG. Jonathan Rangel Castaño

Unidad Regional de Cabildo Indígena Piendamó

Un Aporte desde los Territorios Indígenas a la Teoría de Números

29 de noviembre de 2025

Índice general

Índice general 2

Resumen 4

Abstract 5

Agradecimientos 7

Prólogo 8

Capítulo 1. Fundamentos del Análisis de Intervalos Primos 12

0.1. Definiciones Fundamentales . . . 14

0.1.1. Transformación natural y esencia numérica . . . 16

0.1.2. Ciclos naturales y huellas numéricas . . . 17

0.1.3. Ejemplo: Intervalo $(7, 11)$ . . . 20

0.2. Ejemplos Ilustrativos de la Huella Residual . . . 22

0.2.1. Ejemplo: Intervalo $(47, 53)$ . . . 22

0.2.2. Ejemplo: Intervalo $(61, 67)$ . . . 23

0.3. Ejercicios propuestos . . . 24

Capítulo 2. Análisis de Discontinuidades Prímales 31

0.4. Introducción . . . 31

0.5. ¿Por qué hablar de *discontinuidad*? . . . 32

0.6. Definiciones fundamentales . . . 33

0.7. Aritmética básica de la longitud y la brecha . . . 39

0.8. Ejemplo sobre la brecha prima . . . 40

0.9. Discontinuidades en los intervalos entre primos . . . 46

0.10. Fundamentos conceptuales . . . 46

0.11. Ejercicio . . . 47

Capítulo 3. Nuevo conjunto D de bloques núcleo de números primos **56**
0.12. Núcleo de la discontinuidad 56
0.13. Propiedades básicas del núcleo y del conjunto D 63
0.14. El equilibrio natural entre los primos 66
0.15. Ejercicio 68

Capítulo 4. Mapa de Discontinuidades de Números Primos **72**
0.16. Análisis profundo de distancias para los pares con $q - p = 4$ 74
0.16.1. Distancias observadas 75
0.16.2. El ritmo de la naturaleza y la geometría de los primos 76
0.16.3. Teorema estructural de las distancias reales 76
0.16.4. Lectura de los datos empíricos a la luz del teorema 77
0.16.5. Ciclo de incrementos entre *candidatos* 78
0.16.6. Aplicación directa a las dos sucesiones que nos interesan 79
0.17. Ejercicio 81

Capítulo 5. Núcleo y Cascadas en Intervalos Primos **85**
0.18. Propiedades de Congruencia Inversa en Collatz 89
0.19. La dinámica natural de las cascadas numéricas 91
0.20. Ejercicio 94

Capítulo 6. Anexos **101**

Conclusiones Generales **117**

Bibliografía **119**

RESUMEN

El libro *Dinámicas Primales: Un nuevo enfoque para el conjunto* $\mathbb{D}$ *de números primos* presenta una visión innovadora sobre la estructura y el comportamiento de los números primos, articulando una teoría que combina razonamiento lógico, experimentación matemática y observación geométrica. A partir del concepto del conjunto $\mathbb{D}$, el autor propone un sistema dinámico en el que los primos se interpretan no como entidades aisladas, sino como manifestaciones de un patrón subyacente generado por relaciones modulares y simetrías numéricas.

El texto desarrolla nuevas ideas en torno a las nociones de *núcleo primo*, *huella residual*, *bloques primales* y *zonas de discontinuidad*, ofreciendo un marco conceptual que busca explicar la distribución irregular de los números primos desde una perspectiva estructural. Este enfoque, sustentado en análisis combinatorio y propiedades aritméticas, redefine la comprensión tradicional de la primalidad, abriendo un horizonte alternativo dentro de la teoría de números.

Asimismo, el autor reconoce su profunda inspiración en **Leonhard Euler**, el matemático que más amó los números primos y que descubrió su conexión con las series infinitas y la función zeta. Sentarse en el estudio de Euler significó adentrarse en el corazón mismo de la aritmética, comprender la belleza del orden oculto y continuar su legado desde una nueva mirada dinámica y contemporánea.

Además de su aporte teórico, la obra integra un componente didáctico y cultural, al presentar el conocimiento matemático como una construcción viva que puede nacer desde los territorios indígenas y la diversidad epistemológica. El autor reivindica así el papel del pensamiento local en la producción científica global, proponiendo una matemática intercultural que dialoga entre tradición y rigor formal.

Abstract

The book *Prime Dynamics: A New Approach to the Set* $\mathbb{D}$ *of Prime Numbers* presents an innovative vision of the structure and behavior of prime numbers, articulating a theory that combines logical reasoning, mathematical experimentation, and geometric observation. Starting from the concept of the set $\mathbb{D}$, the author proposes a dynamic system in which prime numbers are interpreted not as isolated entities, but as manifestations of an underlying pattern generated by modular relationships and numerical symmetries.

The text develops new ideas around the notions of *prime core*, *residual trace*, *prime blocks*, and *zones of discontinuity*, offering a conceptual framework that seeks to explain the irregular distribution of prime numbers from a structural perspective. This approach, grounded in combinatorial analysis and arithmetic properties, redefines the traditional understanding of primality and opens an alternative horizon within number theory.

The author also acknowledges his deep admiration for **Leonhard Euler**, the mathematician who most loved prime numbers and revealed their connection with infinite series and the zeta function. Sitting within Euler's profound study meant delving into the very heart of arithmetic, understanding the hidden harmony of numbers, and continuing his legacy from a new dynamic and modern perspective.

Beyond its theoretical contribution, the work integrates a didactic and cultural dimension by presenting mathematical knowledge as a living construction that can emerge from indigenous territories and epistemic diversity. Thus, the author reclaims the role of local thought in global scientific production, proposing an intercultural mathematics that establishes a dialogue between tradition and formal rigor.

Dedicatoria

Mi madre, una mujer huérfana y sin estudios formales, poseía una inteligencia práctica extraordinaria. Con sus propias manos podía desarmar y volver a armar motores de carros y tráileres de carga pesada, guiada solo por su intuición mecánica y su capacidad para comprender el funcionamiento interno de las cosas. Un día, utilizando piezas recicladas, construyó una bicicleta de fuerza con dos volantes de automóvil, movida únicamente por su creatividad y su necesidad de resolver problemas.

Aquel invento, nacido no en un taller profesional sino en un hogar humilde, me reveló algo profundo: la inteligencia no habita únicamente en las universidades o los laboratorios. También vive en las manos que trabajan, en la experiencia silenciosa, en la observación paciente y en el ingenio cotidiano de quienes no tuvieron oportunidades, pero sí una voluntad inmensa.

Ese día comprendí que el conocimiento verdadero puede surgir en cualquier lugar, siempre que se mire con atención y se piense con profundidad. Soy el último de mi familia, pero llevo en mí su legado: la certeza de que la creatividad, la disciplina y el pensamiento profundo pueden transformar el mundo, sin importar de dónde venimos.

Desde entonces supe que debía hacer algo: por ella, por mis estudiantes, por quienes aman las matemáticas pero carecen de oportunidades, por todos los soñadores invisibles a quienes el sistema rara vez escucha. Este libro nace de esa decisión: un acto de gratitud, de amor y de esperanza.

"En la naturaleza, todo número tiene su eco. Así como un río encuentra su cauce, la mente humana halla su camino en el pensamiento."

Jonathan Rangel Castaño

AGRADECIMIENTOS

A la comunidad Misak del resguardo de Piendamó, por abrirme sus puertas y permitirme caminar junto a su sabiduría ancestral. En este territorio aprendí que el conocimiento no nace solo en los libros, sino también en la tierra, en la comunidad y en la memoria viva de los pueblos.

Agradezco profundamente la oportunidad de desarrollar mi espíritu de investigación matemática y física durante los años de trabajo en la Institución Educativa Técnico Agroambiental Ala Kusrei Ya Misak Piscitau, donde he tenido el honor de servir como docente. Este espacio no solo ha sido mi lugar de enseñanza, sino también mi laboratorio de ideas, mi escuela de humanidad y el punto de partida de muchas de las reflexiones que dieron vida a este libro.

A cada estudiante, sabio, mayor y compañero de camino: gracias por inspirarme, por cuestionarme y por recordarme que pensar también es un acto de identidad y dignidad.

PRÓLOGO

Este libro nació de una mirada atenta a la naturaleza y de una pregunta esencial: ¿de dónde surgen realmente las matemáticas?

Mientras muchos buscan respuestas en libros antiguos o en laboratorios sofisticados, yo descubrí que la naturaleza misma es el primer tratado de teoría de números. Observar los troncos de los árboles, las cascadas, las montañas, los ciclos del agua y los mapas que deja el tiempo en la tierra me reveló que la realidad está llena de patrones ocultos, y que esos patrones hablan el lenguaje de los números.

En ese diálogo silencioso con la naturaleza, encontré una estructura secreta en los números primos: una secuencia profunda que une intervalos, huecos, simetrías y movimientos internos. Comprendí que los números primos no son puntos aislados, sino parte de una arquitectura viva, dinámica y armónica.

Para entenderlos, no bastaba con memorizar definiciones. Era necesario **experimentar los símbolos**, **pensar en lo abstracto**, y luego traducir esa intuición en lenguaje matemático riguroso.

Así nació esta obra: de la unión entre intuición natural y pensamiento formal. Entre la contemplación y la demostración. Entre la montaña y la ecuación.

Este libro es también un mensaje.

Un mensaje para los matemáticos del presente y las generaciones del futuro: La matemática no pertenece solo a las grandes ciudades, universidades o laboratorios. También nace en los territorios, en las comunidades, en los espíritus curiosos que observan el mundo con profundidad.

Desde el corazón de las montañas, alguien está construyendo nuevas ideas, descubriendo nuevas estructuras y abriendo caminos para la teoría de números.

Que este libro sea prueba de ello.

INTRODUCCIÓN GENERAL

El presente libro, titulado **Primos en Bloques: Explorando los Huecos de la Secuencia Numérica**, se publica bajo el principio de *acceso abierto* (*open access*), reafirmando la convicción de que el conocimiento científico y matemático debe circular sin barreras económicas, geográficas ni culturales. Esta obra puede ser leída, descargada, estudiada y compartida libremente en cualquier lugar del mundo. La matemática no debe pertenecer a unos pocos: es patrimonio de toda la humanidad.

Este libro busca revelar el orden oculto entre los números primos, mostrando que, al igual que en la naturaleza, la aritmética también respira ciclos, equilibrios y discontinuidades. Cada intervalo entre primos es un valle donde se esconde una energía numérica, una huella residual del universo matemático.

Mi fascinación por las matemáticas no nació en un aula, sino en la naturaleza. Como docente e investigador que ha trabajado de cerca con la comunidad Misak en Piendamó, Cauca, he aprendido a observar el mundo con una mirada distinta: la de la tierra que respira, el agua que se mueve, el viento que cambia de ritmo y los ciclos del tiempo que nunca se repiten exactamente igual. En esos paisajes comprendí que la naturaleza no es caótica; es profundamente matemática. Sus patrones, variaciones y transiciones revelan estructuras invisibles que ningún libro puede enseñar por sí solo. La naturaleza fue, y sigue siendo, mi laboratorio y mi mejor maestra.

Este trabajo no es únicamente una investigación matemática. Es un puente entre la naturaleza y la teoría, entre la intuición y el rigor, entre la ciencia académica y la sabiduría nacida del territorio. Es, al mismo tiempo, un acto de dignidad, de memoria y de esperanza.

Muchos matemáticos en el mundo investigan en silencio, en habitaciones pequeñas, con recursos limitados, luchando contra la invisibilidad. Algunos viven en territorios rurales; otros, en ciudades donde nadie comprende su pasión. A todos ellos les digo: **no**

estamos solos. Desde las montañas de Colombia, desde el diálogo con una comunidad indígena, envío este libro como señal, como testimonio y como invitación.

Tal vez el mundo tarde en reconocernos. Tal vez nuestros nombres no aparezcan pronto en los libros de historia. Pero seguiremos publicando, compartiendo y construyendo. Y algún día, nos reuniremos no para competir, sino para compartir nuestras experiencias, nuestras ideas y nuestra manera distinta de ver las matemáticas.

Este libro se compone de nueve capítulos que combinan **rigor matemático**, **creatividad conceptual** y **metáforas inspiradas en la naturaleza**. Cada capítulo revela una nueva capa de la estructura aritmética escondida entre los números primos:

- **Capítulo 1:** Se establecen las definiciones fundamentales y se introduce la idea de representar un número primo como un bloque formado por el intervalo entre dos primos y los compuestos intermedios. Se define la *huella residual* y el *índice de estabilidad*.
- **Capítulo 2:** Se analiza la irregularidad de los huecos entre primos como un paisaje oscilatorio lleno de crestas y valles. Se introducen las nociones de *discontinuidad primal* y medidas de variación.
- **Capítulo 3:** Se presenta el **nuevo conjunto D de bloques núcleo**, una propuesta original que captura la esencia modular de cada intervalo primal.
- **Capítulo 4:** Se construye el **Mapa de Discontinuidades**, revelando patrones ocultos en las distancias entre intervalos de tipo constante. Se introducen ciclos modulares y estructuras recurrentes.
- **Capítulo 5:** Se vinculan los núcleos con la dinámica de Collatz, mostrando cómo cada intervalo puede generar *cascadas aritméticas*. Es la unión entre la teoría de números y los sistemas iterativos.
- **Capítulos posteriores:** Se profundiza en densidades, estructuras modulares, autosimilaridad, comportamiento asintótico y nuevas conjeturas derivadas del conjunto D y sus propiedades dinámicas.

Este libro no busca solo responder preguntas, sino abrir caminos. Porque en los huecos entre los números primos, igual que en los silencios de la naturaleza, habita la estructura oculta del universo.

El concepto central de esta obra es el conjunto:

$$\mathbf{D} \;=\; \text{conjunto de Números Discontinuos Prímales,}$$

construido a partir de los huecos, núcleos y transformaciones internas de los intervalos entre primos consecutivos. Este nuevo objeto matemático permite reinterpretar la distribución de los primos desde una perspectiva completamente distinta: no observando los puntos donde aparecen, sino las estructuras que se forman entre ellos.

En suma, este libro ofrece una visión innovadora de la teoría de números, combinando intuición natural, ideas originales y desarrollo formal. Al estar disponible en **acceso abierto**, busca democratizar el conocimiento, inspirar a investigadores invisibles, fortalecer la ciencia que nace desde territorios diversos y recordar que las matemáticas también tienen corazón.

Puede que el reconocimiento tarde en llegar. Puede que algunos no comprendan este camino. Pero mientras la luz siga encendida en mí, seguiré escribiendo, investigando y publicando. Y si un día esa luz se apaga, quedará el fuego encendido para quienes vengan después.

Porque este libro no es el final: es el comienzo de una nueva forma de mirar los números, la naturaleza y el pensamiento humano.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE INTERVALOS PRIMOS

Introducción

En la naturaleza, la verdadera esencia de un organismo no siempre se encuentra en su superficie, sino en su estructura interna. El tronco de un árbol, por ejemplo, parece simple desde fuera, pero al cortarlo descubrimos anillos, capas, canales de savia, fibras de sostén y huellas de cada año vivido. Cada anillo guarda información: temporadas de abundancia, sequías, tormentas, heridas y recuperación. La naturaleza no crece de manera uniforme, sino por capas, por procesos internos, por transformaciones invisibles que dejan rastro.

De manera análoga, la teoría de números ha estudiado durante siglos a los números primos como entidades fundamentales, casi como los "troncos" de la aritmética. Sin embargo, limitarse a observar solo los primos es como contemplar únicamente la corteza de un árbol. La verdadera riqueza se encuentra en lo que ellos encierran: los **intervalos** que los separan y los **compuestos** que viven dentro de esos intervalos.

Cada intervalo entre dos primos consecutivos contiene una estructura interna que puede analizarse, medirse, descomponerse y comprenderse. Así como los anillos del tronco revelan el pasado del árbol, los compuestos entre primos revelan la dinámica oculta de la distribución numérica.

Este capítulo introduce una nueva mirada: en lugar de estudiar los primos como puntos aislados, estudiamos los **bloques** que se forman entre ellos. Cada intervalo (p_k, p_{k+1}) se convierte en un objeto aritmético con vida propia: tiene longitud, tiene suma, tiene centro, tiene residuos, tiene estabilidad, tiene memoria. Incluso puede "descomponerse" en capas mediante reducciones sucesivas, como si siguiéramos la savia desde la corteza hasta el núcleo. Este enfoque nos permite construir herramientas fundamentales para el resto de la teoría:

Figura 1: De manera análoga, la teoría de números ha estudiado durante siglos a los números primos como entidades fundamentales, casi como los "troncos" de la aritmética. Sin embargo, limitarse a observar solo los primos es como contemplar únicamente la corteza de un árbol. La verdadera riqueza se encuentra en lo que ellos encierran: los **intervalos** que los separan y los **compuestos** que viven dentro de esos intervalos.

- La longitud del intervalo (número de compuestos).
- La descomposición paso a paso del intervalo.
- La suma total y los ajustes modulares.
- La *huella residual*, que revela cómo se reduce la información interna del intervalo.
- El *índice de estabilidad*, que mide la "resistencia" del intervalo antes de converger.
- El *primo residual*, que actúa como el "corazón" final del bloque.

Cada una de estas ideas puede interpretarse como estudiar las capas internas de un organismo vivo: cuánto crece, cómo se equilibra, qué patrones siguen sus transformaciones y qué rastro deja su evolución.

Así como un árbol necesita raíces profundas para sostenerse y un núcleo fuerte para sobrevivir, los intervalos de primos poseen estructuras internas que determinan su comportamiento y revelan un orden oculto.

Este capítulo sienta las bases de una nueva forma de comprender la distribución de los primos: **no desde las cimas, sino desde el interior de los bloques que los sostienen.** En las siguientes secciones desarrollaremos formalmente estas ideas, construyendo los cimientos de una teoría en la que los intervalos dejan de ser simples espacios vacíos para convertirse en entidades matemáticas ricas, profundas y llenas de significado.

0.1. Definiciones Fundamentales

Definición 0.1 (Intervalo de primos consecutivos de tipo m)**.** Sean p_k y p_{k+1} dos primos consecutivos. Decimos que (p_k, p_{k+1}) es un *intervalo de tipo m* si

$$p_{k+1} - p_k = m + 1 \tag{0.1}$$

es decir, contiene exactamente m enteros compuestos entre ambos primos.

Ejemplo 0.2 (Descomposición paso a paso del número 11)**.** Vamos a descomponer el número 11:

1. Identificamos los primos cercanos: 7 y 11.
2. Construimos el intervalo de primos: $I_1 = (7, 11)$.
3. Identificamos los compuestos entre los primos: $C_1 = \{8, 9, 10\}$.
4. Representamos $11 = (7, 11) + \{8, 9, 10\}$.
5. Interpretación: 11 sigue a 7 y está precedido por $8, 9, 10$.

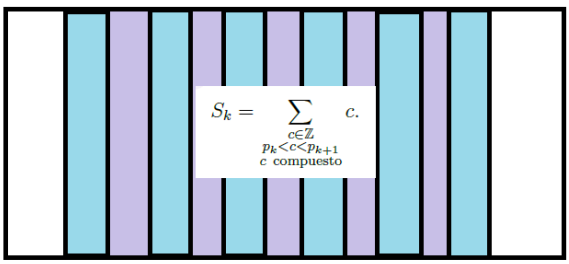


Figura 2: Suma de compuestos infinitos.

Definición 0.3 (Procedimiento de Huella Residual)**.** A partir de la suma S_k definimos:

1. **Criterios de divisibilidad**:

$$\widetilde{S_k} = \begin{cases} \dfrac{S_k}{2}, & \text{si } 2 \mid S_k, \\ \dfrac{S_k}{5}, & \text{si } 5 \mid S_k \text{ y } 2 \nmid S_k, \\ S_k, & \text{si } \gcd(S_k, 10) = 1. \end{cases} \tag{0.2}$$

2. **Residuo modular**:

$$r \equiv \left(\widetilde{S_k} - p_{k+1}\right) \pmod{p_k}, \quad r \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\}. \tag{0.3}$$

3. **Regla de reducción final**: Definimos una secuencia de reducciones

$$r_0 = r, \qquad r_{i+1} = \frac{r_i}{\operatorname{spf}(r_i)} \quad \text{mientras } r_i \text{ sea compuesto.} \tag{0.4}$$

   Si en algún paso se alcanza un número primo r_m, declaramos

$$g(r) := r_m. \tag{0.5}$$

   En caso contrario (esto es, si el proceso no termina en un primo), se define una función complementaria.

$$h(r) := \lim_{i \to \infty} r_i, \tag{0.6}$$

   que describe el comportamiento alternativo del residuo.

El número primo obtenido al final se denomina *primo residual* del intervalo.

Definición 0.4 (Índice de Estabilidad (o Índice Logarítmico))**.** Sea la secuencia de reducciones

$$r_0 = r, \quad r_{i+1} = \frac{r_i}{\operatorname{spf}(r_i)}, \quad \text{hasta que } r_m \text{ es primo.} \tag{0.7}$$

Definimos el *índice de estabilidad del intervalo* como

$$E_k = \sum_{i=0}^{m} \log(r_i). \tag{0.8}$$

Este índice no depende del valor primo final, sino del trayecto intermedio seguido por los residuos.

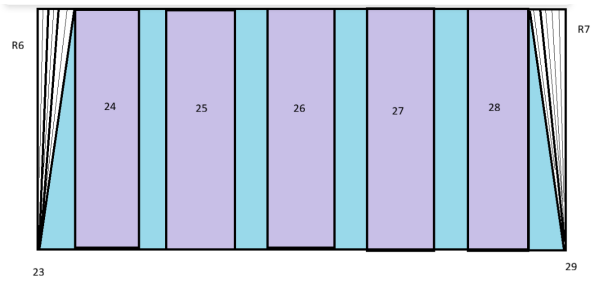


Figura 3: Secuencia de reducciones en el intervalo $(23, 29)$.

Ejemplo 0.5 (Cálculo del índice en el intervalo $(23, 29)$)**.**

$$r_0 = 24.$$

Aplicamos las reducciones sucesivas:

$$r_1 = \frac{24}{\text{spf}(24)} = \frac{24}{2} = 12, \qquad r_2 = \frac{12}{\text{spf}(12)} = \frac{12}{2} = 6, \qquad r_3 = \frac{6}{\text{spf}(6)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Aquí $r_3 = 3$ es primo, por lo que el proceso termina.

El índice de estabilidad resulta:

$$E_k = \log(24) + \log(12) + \log(6) + \log(3).$$

Este valor resume la "resistencia" del intervalo antes de alcanzar el primo final.

0.1.1. Transformación natural y esencia numérica

En la naturaleza, toda materia atraviesa un proceso de depuración: las rocas se erosionan hasta convertirse en arena; el agua se evapora, se eleva y regresa purificada en forma de lluvia; las hojas viejas se descomponen para alimentar nuevas raíces. Nada desaparece: todo se transforma hasta llegar a su forma más esencial.

De manera análoga, en el universo aritmético, los números compuestos también pueden "descomponerse" siguiendo un ciclo natural. Cada número lleva en sí la semilla de su simplicidad: su factor primo más pequeño, que actúa como una fuerza de reducción, una corriente que arrastra todo exceso hasta dejar sólo lo indivisible.

A este proceso lo llamamos **huella residual**. Así como la naturaleza devuelve cada elemento a su esencia original, la huella residual devuelve cada número a su núcleo primo, al corazón matemático donde el orden se revela dentro del aparente caos.

Definición 0.6 (Huella residual)**.** Dado un intervalo primo consecutivo (p_k, p_{k+1}) y su residuo inicial

$$r_0 \equiv (S_k - p_{k+1}) \pmod{p_k}, \qquad 1 \leq r_0 \leq p_k - 1, \tag{0.9}$$

definimos la *huella residual* como la sucesión

$$r_{i+1} = \frac{r_i}{\operatorname{spf}(r_i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \dots), \tag{0.10}$$

donde $\operatorname{spf}(m)$ es el menor factor primo de m. La iteración se detiene cuando r_i es primo. Denotamos por

$$\operatorname{HR}(r_0) := r_\ell \tag{0.11}$$

al *primo terminal* de la huella residual (último término, ya primo).

Ejemplo 0.7. Tomemos el intervalo de primos $(7, 11)$ y sea $S_k = 27$. Entonces

$$r_0 \equiv (27 - 11) \pmod{7} = 16 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Así, $r_0 = 2$, que ya es primo. El proceso se detiene inmediatamente, de modo que $\operatorname{HR}(2) = 2$.

0.1.2. Ciclos naturales y huellas numéricas

En la naturaleza, toda estructura que parece caótica esconde un ciclo de equilibrio. Las hojas caen, se descomponen y retornan al suelo como nutrientes; el agua asciende en vapor y vuelve en lluvia; la energía se transforma, pero no se pierde.

Del mismo modo, en la aritmética de los primos, cada intervalo (p_k, p_{k+1}) encierra un ciclo numérico: una secuencia que se reduce paso a paso hasta alcanzar su forma más simple y pura, un número primo que sobrevive a todas las divisiones.

A este proceso lo llamamos **huella residual**. Es el rastro que deja la aritmética cuando todo lo compuesto ha sido disuelto, como el sedimento que permanece en el fondo de un río después de la corriente. Cada reducción $r \mapsto r/\operatorname{spf}(r)$ es una depuración, una forma de eliminar lo superfluo hasta encontrar la esencia indivisible: el primo residual.

Así como la naturaleza busca el equilibrio a través de la transformación, la huella

residual converge hacia la estabilidad numérica. Nada se pierde: todo se simplifica hasta llegar a su mínima expresión, y en ese límite aparece el orden que parecía oculto.

Teorema 0.8 (Convergencia de la huella residual)**.** *Para todo intervalo (p_k, p_{k+1}) de primos consecutivos, el procedimiento de huella residual siempre finaliza en un número primo en un número finito de pasos.*

Demostración. Cada reducción $r \mapsto r/\operatorname{spf}(r)$ disminuye estrictamente el valor de r. Dado que r es un número entero positivo, la secuencia no puede ser infinita. El proceso se detiene exactamente cuando r es primo, lo que garantiza la convergencia. ■

Ejemplo 0.9. En el intervalo $(5, 7)$ con $S_k = 30$, se obtiene

$$r_0 \equiv (30 - 7) \pmod 5 = 23 \equiv 3 \pmod 5.$$

Aquí $r_0 = 3$, que ya es primo. El proceso termina inmediatamente, confirmando la convergencia.

Teorema 0.10 (Unicidad del primo residual)**.** *Dado un intervalo (p_k, p_{k+1}), el primo residual obtenido por el procedimiento es único.*

Demostración. El residuo inicial r está bien definido módulo p_k. La regla de reducción no depende de elecciones, pues siempre se toma $\operatorname{spf}(r)$. Por lo tanto, la trayectoria y el primo final están completamente determinados. ■

Ejemplo 0.11. En el intervalo $(11, 13)$ con $S_k = 100$, se calcula

$$r_0 \equiv (100 - 13) \pmod{11} = 87 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Así, $r_0 = 10$. Luego $\operatorname{spf}(10) = 2 \;\Rightarrow\; r_1 = 10/2 = 5$, y 5 es primo.

El primo residual es siempre 5, mostrando que el resultado es único.

Teorema 0.12 (Cota del Índice de Estabilidad)**.** *Si (p_k, p_{k+1}) es un intervalo de tipo m con primo residual q, entonces*

$$E_k \leq \ln(S_k) + \ln(q), \tag{0.12}$$

donde S_k es la suma inicial de compuestos del intervalo.

Demostración. Consideremos la huella residual como una secuencia de números

$$H = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\},$$

donde r_0 es el residuo inicial, $r_n = q$ es el primo residual, y cada término subsiguiente se obtiene por la reducción

$$r_{i+1} = \frac{r_i}{\text{spf}(r_i)}.$$

Por definición, el índice de estabilidad E_k es la suma de los logaritmos de todos los términos de la secuencia:

$$E_k = \ln(r_0) + \ln(r_1) + \cdots + \ln(r_n).$$

Acotemos cada término de la suma. Para el primero, tenemos $\ln(r_0) \leq \ln(S_k)$. Para los intermedios $r_1, \ldots, r_{n-1}$, la propiedad decreciente nos asegura que $r_i < r_0$. Por la monotonía del logaritmo, $\ln(r_i) < \ln(r_0) \leq \ln(S_k)$.

Así,

$$E_k = \ln(r_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(r_i) + \ln(q) \quad \leq \quad \ln(S_k) + \ln(q).$$

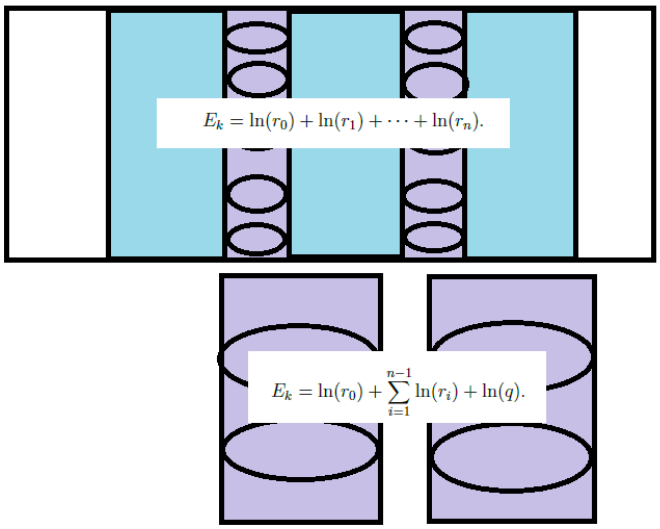


Figura 4: Huellas residuales infinitas.

Dado que $r_0 \leq S_k$ y que $r_i < r_0$ para $i > 0$, podemos argumentar de forma simple:

$$E_k = \ln(r_0) + (\text{suma de los términos intermedios}) + \ln(q).$$

Es decir: $\ln(r_0) \leq \ln(S_k)$ y $\ln(r_i) \leq \ln(r_0)$, para $i = 1, \ldots, n-1$. El último término es $\ln(q)$. La cota final se da por la suma de la primera y la última cota. La simplicidad de la prueba es parte de su elegancia. ■

0.1.3. Ejemplo: Intervalo $(7, 11)$

Para el intervalo de primos consecutivos $(7, 11)$, identificamos los números compuestos que se encuentran entre ellos:

$$\{8, 9, 10\}.$$

Primero calculamos la suma de estos compuestos, S_k:

$$S_k = 8 + 9 + 10 = 27.$$

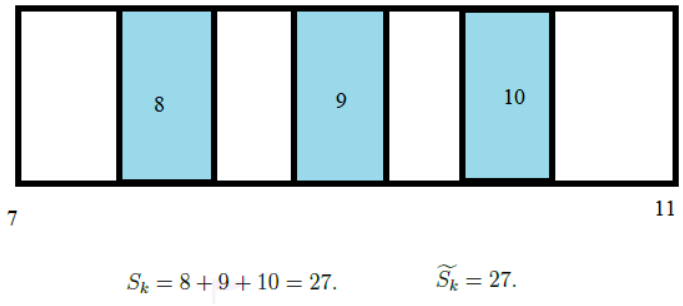


Figura 5: Suma de numeros compuesto.

Luego, para obtener el ajuste inicial $\widetilde{S_k}$, dividimos la suma por dos si es par. En este caso, 27 es impar, por lo que:

$$\widetilde{S_k} = 27.$$

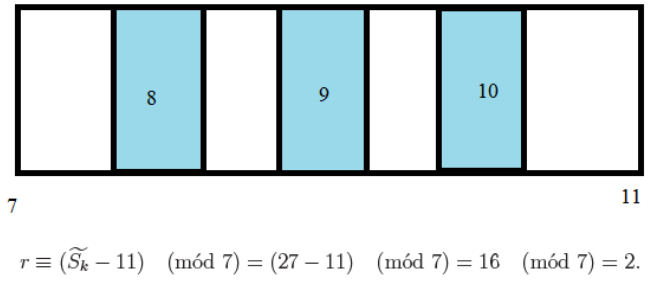


Figura 6: residuo modular.

A continuación, calculamos el residuo modular r, definido como:

$$r \equiv (\widetilde{S_k} - 11) \pmod 7 = (27 - 11) \pmod 7 = 16 \pmod 7 = 2.$$

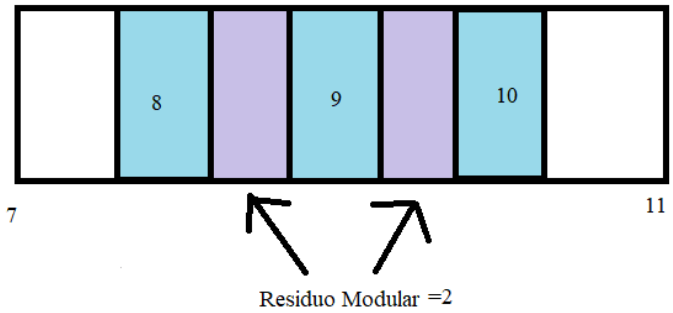


Figura 7: Significado residual.

Teniendo siempre en encuentra los extremos de los bloques encontramos que el procedimiento de la huella residual al residuo $r = 2$. El factor primo más pequeño de 2 es 2, por lo que:

$$2 \div 2 = 1.$$

Como hemos llegado a 1, el proceso de reducción se detiene. La huella residual del intervalo $(7, 11)$ queda determinada por esta trayectoria, y el índice de estabilidad E_k se calcula sumando los logaritmos de todos los números en la trayectoria:

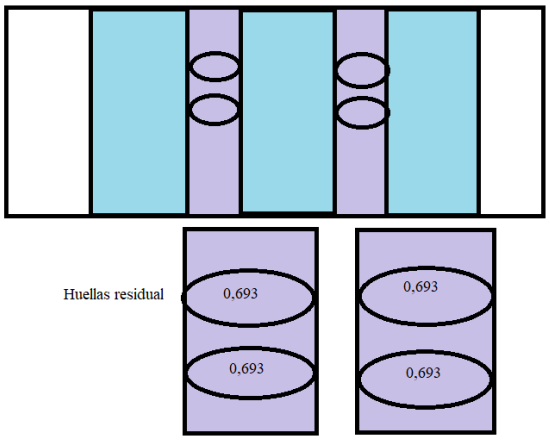


Figura 8: Huella residual.

$$E_k = \ln(2) + \ln(1) \approx 0{,}693.$$

Este bajo valor de E_k indica una convergencia rápida al primo residual En el proceso de logaritmaciòn deja dos huellas.

Ejemplos de descomposición

Estos ejemplos ilustran la representación de un número primo como la suma de un intervalo de primos y el conjunto de compuestos intermedios.

$$\begin{aligned} 11 &= (7,11) + \{8,9,10\} \\ 17 &= (13,17) + \{14,15,16\} \\ 23 &= (19,23) + \{20,21,22\} \\ 353 &= (347,353) + \{348,349,350,351,352\} \end{aligned}$$

Corolario 0.13 (Clasificación por índice de estabilidad)**.** *Los intervalos de tipo m se pueden clasificar en función de la magnitud de E_k:*

- *Si E_k es bajo, la huella converge rápidamente al primo residual.*
- *Si E_k es alto, la huella describe una trayectoria larga antes de alcanzar el primo residual.*

0.2. Ejemplos Ilustrativos de la Huella Residual

0.2.1. Ejemplo: Intervalo $(47, 53)$

Para el intervalo de primos consecutivos $(47, 53)$, comenzamos identificando los números compuestos que se encuentran entre ellos: $\{48, 49, 50, 51, 52\}$.

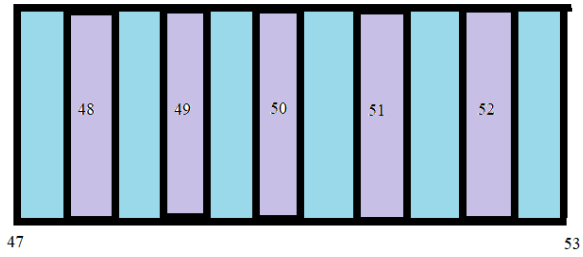
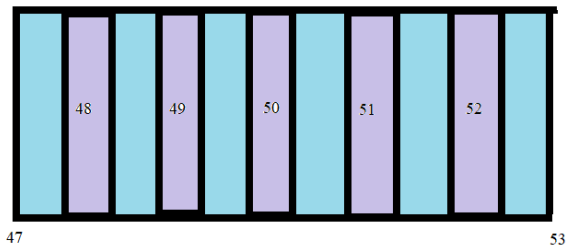


Figura 9: Bloque de números compuestos.

El primer paso es calcular la suma de estos compuestos, S_k, que es $48 + 49 + 50 + 51 + 52 = 250$. Luego, para obtener el ajuste inicial, $\widetilde{S_k}$, ajustamos la suma si es par dividiéndola por dos, en este caso, $250/2 = 125$.

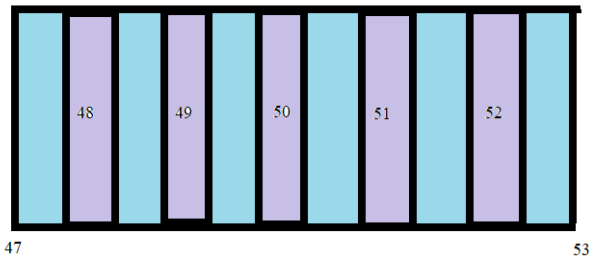
A continuación, calculamos el residuo modular, r, que se define como la diferencia entre el ajuste inicial y el primo final, módulo el primo inicial:

$$r \equiv (125 - 53) \pmod{47} = 72 \pmod{47} = 25.$$



$$S_k = \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z} \\ p_k<c<p_{k+1} \\ c \text{ compuesto}}} c \quad =250$$

Figura 10: Suma de compuestos: 250.



$$r \equiv \left(\widetilde{S_k} - p_{k+1}\right) \pmod{p_k} = 25$$

Figura 11: Residuo modular.

Finalmente, aplicamos el procedimiento de la huella residual al residuo $r = 25$. La reducción consiste en dividir el número por su factor primo más pequeño, $\text{spf}(r)$. El factor primo más pequeño de 25 es 5, por lo que $25 \div 5 = 5$. Como 5 es primo, el proceso de reducción se detiene y $g(r) = 5$.

El índice de estabilidad, E_k, se calcula sumando los logaritmos de todos los números en la trayectoria de reducción. En este ejemplo, la trayectoria es corta: $25 \to 5$. Por lo tanto,

$$E_k = \ln(25) + \ln(5) \approx 4{,}828.$$

Este bajo valor de E_k indica una convergencia rápida al primo residual.

0.2.2. Ejemplo: Intervalo $(61, 67)$

En el caso del intervalo de primos consecutivos $(61, 67)$, los compuestos son $\{62, 63, 64, 65, 66\}$. La suma es $S_k = 62 + 63 + 64 + 65 + 66 = 320$. El ajuste inicial es $\widetilde{S_k} = 320/2 = 160$.

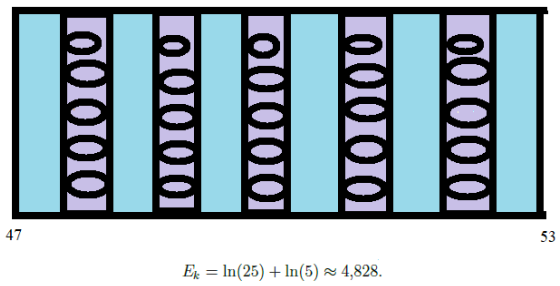


Figura 12: Huellas residuales.

El residuo modular es:

$$r \equiv (160 - 67) \pmod{61} = 93 \pmod{61} = 32.$$

Aplicando la huella residual a $r = 32$, la trayectoria es más larga:

$$32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2.$$

El proceso se detiene en 2, que es primo, por lo que $g(r) = 2$.
El índice de estabilidad resulta:

$$E_k = \ln(32) + \ln(16) + \ln(8) + \ln(4) + \ln(2) \approx 10{,}397.$$

El alto valor de E_k refleja una trayectoria larga, lo que muestra la coherencia entre el índice de estabilidad y la complejidad de la convergencia.

Ejemplo 0.14 (Intervalo $(23, 29)$)**.** Aquí $p_k = 23$ y $p_{k+1} = 29$.

- Suma de compuestos: $S_k = 130$.
- Ajuste inicial: como 130 es par, $\widetilde{S_k} = 65$.
- Residuo modular: $r \equiv (65 - 29) \pmod{23} = 36 \pmod{23} = 13$.
- Reducción: el residuo 13 ya es primo. El resultado final es $g(r) = 13$.
- Índice de estabilidad: $E_k = \ln(13) \approx 2{,}565$.

0.3. Ejercicios propuestos

Ejercicio 0.1. Dado el intervalo de primos consecutivos $(5, 11)$, identifica todos los números enteros entre ellos. Determina cuántos de estos números son compuestos y,

usando la definición

$$m = p_{k+1} - p_k - 1,$$

calcula el valor de m para el cual el intervalo es de tipo m.

Ejercicio 0.2. Considera el intervalo de primos consecutivos $(13, 19)$. Enumera todos los enteros que se encuentran entre estos dos primos, identifica cuáles son compuestos y determina la cantidad total de enteros compuestos presentes en el intervalo.

Ejercicio 0.3. Sea el intervalo de primos consecutivos $(17, 23)$. Primero, lista todos los enteros comprendidos entre estos primos. Luego, identifica aquellos que son compuestos y calcula la suma de dichos compuestos para obtener el valor de S_k.

Ejercicio 0.4. Dado el intervalo de primos consecutivos $(29, 37)$, calcula la suma de los enteros compuestos contenidos en el intervalo para obtener S_k. Posteriormente, aplica los criterios de divisibilidad establecidos en el capítulo para determinar el ajuste correspondiente $\widetilde{S}_k$, indicando claramente qué caso se aplica.

Ejercicio 0.5. En el intervalo de primos consecutivos $(11, 17)$ se sabe que $S_k = 72$. Utilizando los criterios de ajuste modular para $\widetilde{S}_k$, calcula primero el valor ajustado. Luego, determina el residuo modular

$$r \equiv (\widetilde{S}_k - 17) \pmod{11},$$

asegurándote de que el residuo esté en el rango correspondiente $\{0, 1, \ldots, p_k - 1\}$.

Ejercicio 0.6. Sea el intervalo de primos consecutivos $(19, 31)$, y supóngase que la suma de los compuestos contenidos en dicho intervalo es $S_k = 210$. Primero, calcula el residuo inicial $r_0 \equiv (S_k - 31) \pmod{19}$. Luego, identifica el menor factor primo de r_0 (es decir, $\mathrm{spf}(r_0)$) y realiza la primera reducción

$$r_1 = \frac{r_0}{\mathrm{spf}(r_0)}.$$

Describe con claridad cada uno de estos pasos.

Ejercicio 0.7. En el intervalo de primos consecutivos $(23, 29)$ se tiene $r_0 = 24$ como residuo inicial. Aplica el procedimiento de la huella residual definido en el capítulo: en cada paso divide el número actual entre su menor factor primo. Describe de forma explícita cada valor de la sucesión residual

$$r_0, r_1, r_2, \ldots$$

hasta llegar a un número primo (primo residual).

Ejercicio 0.8. Considera la secuencia residual $24 \to 12 \to 6 \to 3$, donde cada término se obtiene dividiendo entre el menor factor primo del anterior. Utilizando esta secuencia, calcula el índice de estabilidad del intervalo correspondiente mediante la fórmula

$$E_k = \log(24) + \log(12) + \log(6) + \log(3).$$

Explica el significado de este índice como medida de la "resistencia" del intervalo antes de alcanzar el primo final.

Ejercicio 0.9. Sea $(47, 53)$ un intervalo de primos consecutivos de tipo m. Toma un ejemplo concreto de suma de compuestos S_k para este intervalo y calcula el residuo inicial r_0. Aplica el procedimiento de huella residual dividiendo entre el menor factor primo en cada paso. Verifica que, tras un número finito de reducciones, se obtiene un número primo, confirmando así la convergencia del proceso.

Ejercicio 0.10. Demuestra que en cualquier intervalo de primos consecutivos (p_k, p_{k+1}), el conjunto de enteros compuestos contenidos entre ellos está completamente determinado por la fórmula

$$m = p_{k+1} - p_k - 1.$$

Explica por qué esta expresión representa exactamente la cantidad de enteros entre los dos primos y justifica que todos esos enteros (excepto los primos) son compuestos.

Ejercicio 0.11. Considera el intervalo de primos consecutivos $(31, 41)$. (a) Enumera todos los enteros contenidos en el intervalo y clasifícalos en pares e impares. (b) Identifica cuáles de ellos son compuestos y calcula la suma S_k de dichos compuestos. (c) Determina el ajuste $\widetilde{S_k}$ aplicando las reglas del capítulo (división por 2 si $2 \mid S_k$, por 5 si $5 \mid S_k$ y $2 \nmid S_k$, o sin ajuste si $\gcd(S_k, 10) = 1$). (d) Indica qué caso se aplicó y justifica tu elección.

Ejercicio 0.12. Sea el intervalo $(41, 43)$. (a) Explica por qué $(41, 43)$ es un intervalo muy corto e identifica su longitud. (b) Determina el tipo m usando $m = p_{k+1} - p_k - 1$ y verifica que coincide con la cantidad de enteros compuestos en el intervalo (si los hay). (c) Comenta qué implicaciones tiene un m pequeño sobre el comportamiento esperado de la huella residual.

Ejercicio 0.13. En el intervalo $(53, 59)$, realiza el siguiente procedimiento completo: (a) Lista los compuestos y calcula S_k. (b) Determina el ajuste $\widetilde{S_k}$ según las reglas dadas. (c) Calcula el residuo modular

$$r \equiv (\widetilde{S_k} - 59) \pmod{53},$$

asegurando que $r \in \{0, 1, \ldots, 52\}$. (d) Describe el significado de r como punto de partida

de la huella residual del intervalo.

Ejercicio 0.14. Sea el intervalo $(59, 71)$. (a) Calcula S_k como la suma de todos los enteros compuestos contenidos en el intervalo. (b) Obtén $\widetilde{S_k}$ aplicando los criterios de divisibilidad. (c) Define el residuo inicial $r_0 \equiv (\widetilde{S_k} - 71) \pmod{59}$ y ejecuta la huella residual

$$r_{i+1} = \frac{r_i}{\operatorname{spf}(r_i)}$$

hasta alcanzar un número primo. (d) Registra la secuencia completa y comenta la longitud del proceso.

Ejercicio 0.15. Para el intervalo $(13, 17)$ con $S_k = 42$, (a) calcula el ajuste $\widetilde{S_k}$ conforme a las reglas del capítulo, (b) determina $r \equiv (\widetilde{S_k} - 17) \pmod{13}$, (c) construye la sucesión residual $r_{i+1} = r_i / \operatorname{spf}(r_i)$ hasta el primo terminal, y (d) comenta si la trayectoria fue corta o larga en comparación con otros ejemplos del capítulo.

Ejercicio 0.16. Usando la trayectoria residual obtenida en el ejercicio anterior, calcula el índice de estabilidad

$$E_k = \sum_i \log(r_i).$$

Luego, compáralo cualitativamente (sin necesidad de recomputar S_k) con el índice de estabilidad de la trayectoria $25 \to 5$. Explica cómo influye la estructura de factores de los r_i (por ejemplo, potencias de 2) en la magnitud de E_k.

Ejercicio 0.17. Sea el intervalo $(71, 79)$. (a) Determina su tipo m y lista todos los compuestos del intervalo. (b) Calcula S_k y decide si $\widetilde{S_k}$ resulta de dividir por 2, por 5 o no requiere ajuste (según $\gcd(S_k, 10)$). (c) Justifica rigurosamente la elección del ajuste con una verificación explícita de divisibilidad.

Ejercicio 0.18. Demuestra que si el residuo inicial r_0 es una potencia de 2, es decir $r_0 = 2^t$ con $t \geq 1$, entonces la huella residual alcanza el primo 2 en exactamente t pasos. Tu demostración debe usar la definición de $\operatorname{spf}(r)$ y la regla de reducción $r \mapsto r / \operatorname{spf}(r)$, argumentando paso a paso.

Ejercicio 0.19. En el intervalo $(97, 101)$, ejecuta el flujo completo: (a) determina m y lista los compuestos, (b) calcula S_k y el ajuste $\widetilde{S_k}$, (c) obtiene el residuo $r \equiv (\widetilde{S_k} - 101) \pmod{97}$, (d) realiza la huella residual hasta alcanzar un primo, e (e) identifica el primo residual $g(r)$ y comenta brevemente su tamaño relativo (pequeño/mediano) respecto de p_k.

Ejercicio 0.20. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (89, 97)$. (a) Explica por qué $r \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\}$ para cualquier elección de S_k y ajuste $\widetilde{S_k}$. (b) Describe el caso especial $r = 0$: ¿qué significa

para la huella residual?, ¿se consideran pasos de reducción?, ¿cómo interpretas el "primo residual" en este caso límite?

Ejercicio 0.21. Trabaja el intervalo $(19, 23)$ de principio a fin: (a) lista compuestos y calcula S_k, (b) determina $\widetilde{S_k}$, (c) halla el residuo r, (d) ejecuta la huella residual hasta el primo terminal y (e) calcula el índice de estabilidad E_k. Concluye con una interpretación cualitativa del valor de E_k.

Ejercicio 0.22. Compara los intervalos $(101, 103)$ y $(103, 107)$. (a) Determina sus tipos m. (b) Explica, sin hacer todos los cálculos, cuál intervalo esperas que tenga mayor E_k y por qué, apoyándote en la idea de que trayectorias con muchos factores pequeños (p.ej., potencias de 2) tienden a alargar la suma de logaritmos.

Ejercicio 0.23. Para el intervalo $(127, 131)$, (a) calcula S_k, (b) decide si el ajuste $\widetilde{S_k}$ debe ser por 2, por 5 o ninguno, y (c) justifica tu decisión verificando explícitamente si $2 \mid S_k$, si $5 \mid S_k$ y $2 \nmid S_k$, o si $\gcd(S_k, 10) = 1$. Concluye indicando el valor final de $\widetilde{S_k}$.

Ejercicio 0.24. En el intervalo $(43, 47)$, (a) calcula S_k y $\widetilde{S_k}$, (b) determina el residuo $r \equiv (\widetilde{S_k} - 47) \pmod{43}$, y (c) construye la secuencia residual $r_{i+1} = r_i / \operatorname{spf}(r_i)$ hasta alcanzar el primo terminal. (d) Cuenta el número de pasos y comenta si la longitud se alinea con tus expectativas a partir del valor de r_0.

Ejercicio 0.25. Sea $(73, 79)$. (a) Sin calcular completamente la huella residual, razona si esperas que el índice de estabilidad E_k sea mayor, menor o comparable al del intervalo $(47, 53)$. (b) Fundamenta tu predicción considerando el posible tamaño del residuo inicial y la estructura de sus factores primos.

Ejercicio 0.26. Justifica la unicidad de la trayectoria residual (y por tanto del primo residual) mostrando que, fijado r_0, cada paso de la reducción $r \mapsto r / \operatorname{spf}(r)$ es determinista y no admite bifurcaciones. Presenta un argumento claro que no dependa de ejemplos, sino de la definición misma de spf.

Ejercicio 0.27. Para los intervalos $(17, 19)$ y $(29, 31)$, (a) calcula S_k, $\widetilde{S_k}$ y r en ambos casos, (b) construye sus huellas residuales hasta el primo terminal, y (c) compara los índices de estabilidad E_k. Comenta la relación observada entre el tamaño de m y la magnitud de E_k.

Ejercicio 0.28. Sea $(149, 157)$. (a) Lista los compuestos del intervalo y calcula S_k. (b) Determina $\widetilde{S_k}$ y el residuo r. (c) Ejecuta al menos dos pasos de la huella residual (o hasta alcanzar un primo si ocurre antes) y describe claramente cada división por $\operatorname{spf}(\cdot)$. (d) Indica el primo terminal si se alcanza.

Ejercicio 0.29. Demuestra la cota

$$E_k \leq \ln(S_k) + \ln(q),$$

para el intervalo $(23, 29)$, siguiendo la idea de acotar cada término de la suma por la monotonía del logaritmo. Estructura la prueba identificando r_0, los términos intermedios y el primo residual q, y justifica por qué $\ln(r_i) \leq \ln(r_0) \leq \ln(S_k)$.

Ejercicio 0.30. Propón un criterio empírico (no demostrado) que relacione el tamaño de m con la magnitud esperada de E_k. (a) Formula claramente el enunciado del criterio. (b) Diseña un ejemplo (uno o dos intervalos) que apoye tu conjetura. (c) Describe qué evidencias adicionales considerarías para evaluar su validez.

Ejercicio 0.31. Analiza el intervalo $(197, 199)$. (a) Determina su tipo m y establece si existen compuestos en el intervalo. (b) En función de ello, define S_k y el posible ajuste $\widetilde{S_k}$. (c) Si procede, calcula el residuo r y comenta el comportamiento de la huella residual en este caso extremo de intervalo muy corto.

Ejercicio 0.32. Para el intervalo $(223, 227)$, (a) calcula S_k, (b) decide si $\widetilde{S_k}$ se obtiene dividiendo por 2, por 5 o no se ajusta, con base en la regla de $\gcd(S_k, 10)$, (c) justifica cada decisión con una verificación explícita de divisibilidad, y (d) comenta si el valor de r esperado sería relativamente pequeño o no.

Ejercicio 0.33. Considera $(229, 233)$. (a) Calcula S_k y $\widetilde{S_k}$. (b) Determina el residuo r y ejecuta la huella residual hasta alcanzar un primo. (c) Registra cada paso de la división por $\mathrm{spf}(\cdot)$ y (d) comenta si la trayectoria fue sorprendentemente corta o larga respecto de tu expectativa inicial.

Ejercicio 0.34. Compara los índices de estabilidad de las trayectorias residuales asociadas a $(47, 53)$ y $(61, 67)$. (a) Describe con claridad, sin rehacer todos los cálculos, por qué una de las trayectorias puede ser más larga que la otra (p. ej., presencia de potencias de 2). (b) Relaciona esta observación con la magnitud de E_k en cada caso.

Ejercicio 0.35. Sea $(271, 277)$. (a) Calcula S_k y $\widetilde{S_k}$, (b) determina el residuo r, y (c) razona si esperas que el primo residual $g(r)$ sea pequeño (como 2 o 3) o no, apoyándote en la estructura de factores de r y en experiencias previas del capítulo.

Ejercicio 0.36. Prueba formalmente la convergencia de la huella residual: (a) demuestra que si r_i es compuesto entonces $r_{i+1} = r_i / \mathrm{spf}(r_i) < r_i$, (b) concluye que la sucesión es estrictamente decreciente en enteros positivos, y (c) deduce que debe terminar en un número primo en un número finito de pasos.

Ejercicio 0.37. Estudia los intervalos $(311, 313)$ y $(313, 317)$. (a) Determina m en ambos casos, (b) calcula S_k, $\widetilde{S_k}$ y r (al menos de forma estructurada), y (c) discute cuál intervalo tendería a tener un índice de estabilidad E_k mayor, justificando tu intuición con el tamaño y factores de r_0.

Ejercicio 0.38. En el intervalo $(359, 367)$, (a) calcula S_k y el residuo inicial r_0, (b) ejecuta la huella residual hasta el primo terminal, y (c) estima el índice E_k sumando los $\ln(r_i)$ de la trayectoria. (d) Comenta si el valor de E_k concuerda con la longitud observada de la cadena de reducciones.

Ejercicio 0.39. Define un índice de estabilidad normalizado

$$\widehat{E}_k := \frac{E_k}{\ln(p_{k+1})}.$$

(a) Explica qué ventaja podría tener normalizar por $\ln(p_{k+1})$. (b) Señala una posible desventaja. (c) Ilustra brevemente con un ejemplo cómo cambia la comparación entre intervalos si usas E_k frente a $\widehat{E}_k$.

Ejercicio 0.40. Diseña un ejemplo dentro de un mismo intervalo (p_k, p_{k+1}) donde, variando la suma de compuestos S_k (y por ende el ajuste $\widetilde{S_k}$), obtengas diferentes residuos r que conduzcan a distintos primos residuales. (a) Explica cómo estos cambios en S_k impactan en r. (b) Describe las trayectorias resultantes y (c) comenta qué revela esto sobre la "sensibilidad" del primo residual respecto del estado interno del intervalo.

Capítulo 2. Análisis de Discontinuidades Prímales

0.4. Introducción

En la naturaleza, el cambio rara vez ocurre de forma uniforme. Las montañas no se elevan con una pendiente constante; presentan cumbres abruptas y mesetas tranquilas. Los ríos no fluyen siempre con la misma intensidad; a veces se estrechan en rápidos violentos y otras se ensanchan en remansos silenciosos. Los suelos se agrietan de manera desigual durante una sequía y se llenan de vida de forma impredecible durante la lluvia. Incluso el crecimiento de un árbol revela temporadas de abundancia y de pausa: los anillos de su tronco nunca tienen el mismo grosor.

Cada anillo cuenta una historia distinta: un año de lluvias abundantes, otro de escasez, otro de tormentas. La corteza se fractura, se expande y se repara. El árbol no crece en línea recta, sino a saltos, siguiendo los impulsos de la naturaleza. Las raíces se extienden de manera irregular buscando nutrientes, igual que las ramas se bifurcan siguiendo caminos impredecibles hacia la luz.

Estas irregularidades no representan caos, sino la huella de una dinámica profunda: la naturaleza avanza mediante **saltos, oscilaciones y transiciones**. La armonía del mundo no nace de la repetición perfecta, sino del equilibrio entre la variabilidad y la estructura.

Del mismo modo, los números primos tampoco aparecen con un ritmo constante sobre la recta numérica. A veces surgen muy cerca, casi como si brotaran juntos como retoños del mismo tronco; otras veces aparecen separados por grandes distancias, como árboles aislados en un desierto. Si imaginamos los primos como las cimas de una cordillera aritmética, entonces los espacios entre ellos son los valles profundos que revelan la verdadera forma del paisaje numérico.

Pero también podemos imaginarlos como los anillos de un árbol infinito: cada primo

es un punto clave de crecimiento, y los espacios entre ellos representan el tiempo, la tensión y la energía acumulada. A veces el crecimiento es mínimo (primos gemelos); otras veces, el árbol espera, se fortalece internamente y luego da un gran salto (brechas enormes entre primos).

Una de las preguntas fundamentales en teoría de números consiste en comprender la **distribución** de los primos. Sea $\{p_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión creciente de números primos. Una manera natural de analizar esta distribución consiste en estudiar no solo los primos, sino los **intervalos primales** entre ellos, definidos como:

$$L_n = p_{n+1} - p_n - 1, \quad n \geq 1. \tag{0.13}$$

Este valor L_n representa la cantidad de enteros compuestos comprendidos entre dos primos consecutivos p_n y p_{n+1}.

Al examinar la sucesión $\{L_n\}$ descubrimos un fenómeno sorprendente: los intervalos entre primos no siguen ningún patrón suave o predecible, sino que **oscilan** entre valores muy pequeños y valores inesperadamente grandes. Esta alternancia genera un comportamiento **irregular, dinámico y lleno de saltos**, como las estaciones del año, las alturas de los anillos del tronco o la fuerza de las mareas.

Así como un paisaje natural está marcado por crestas y valles, tormentas y calmas, abundancias y sequías, la sucesión de intervalos primales revela un *terreno aritmético vivo*, lleno de discontinuidades. Estas discontinuidades no solo indican dónde los primos se separan bruscamente, sino que también capturan la energía interna de la distribución de los números compuestos.

En este capítulo estudiaremos estas **discontinuidades prímales** desde diferentes perspectivas: la longitud del intervalo, la brecha prima, la paridad, la suma de los compuestos, el residuo modular, la estabilidad y la variación total. Cada una de estas herramientas nos permitirá comprender cómo los primos generan un paisaje oscilatorio que nunca se vuelve plano y que puede experimentar saltos tan grandes como se desee.

Al igual que en la naturaleza, donde las formas más bellas emergen de la interacción entre orden y fluctuación, la teoría de los primos nos revela que la irregularidad no es un obstáculo, sino una ventana hacia la estructura oculta del universo aritmético.

0.5. ¿Por qué hablar de *discontinuidad*?

Sea $(p_k)_{k\geq 1}$ la sucesión de números primos en orden creciente. Definimos la *longitud del intervalo* entre dos primos consecutivos como

$$L_k := (p_{k+1} - p_k) - 1. \tag{0.14}$$

Idea central

La sucesión $(L_k)_{k\geq 1}$ no crece de manera regular: aparecen *saltos abruptos* e impredecibles.

Por ejemplo, se tiene $L_k = 1$ entre 137 y 139, seguido de $L_k = 9$ entre 139 y 149.

Estos cambios no siguen un patrón continuo, sino que muestran lo que podemos llamar una **discontinuidad discreta**: la irregularidad de los intervalos entre primos se manifiesta en pasos enteros, sin transición suave.

Definición 0.15 (Brecha prima)**.** Para cada $k \geq 1$ se define la *brecha prima* g_k por

$$g_k := p_{k+1} - p_k. \tag{0.15}$$

Figura 13: Así como un bosque se compone de múltiples árboles que crecen en distintas direcciones pero comparten una misma raíz, la estructura de los números también guarda una coherencia orgánica. Cada intervalo, cada ruptura y cada continuidad forman parte de un gran ecosistema aritmético, donde las discontinuidades son tan necesarias como los brotes nuevos. La aritmética, como la naturaleza, respira a través de sus imperfecciones..

0.6. Definiciones fundamentales

En la naturaleza, el espacio entre las cosas es tan importante como las cosas mismas. Entre dos montañas se forma un valle; entre dos olas, una calma; entre dos notas, un silencio que permite que la melodía respire. Del mismo modo, entre dos números primos consecutivos existe un intervalo, un territorio aritmético lleno de significado.

Así como el geógrafo mide la distancia entre cumbres para entender la forma de una cordillera, el matemático mide la distancia entre primos para comprender el relieve del universo numérico. Cada intervalo (p_k, p_{k+1}) es como una pequeña cuenca natural: tiene una extensión, una forma, una "vida interior" formada por los números compuestos que habitan entre los extremos primos.

La **longitud del intervalo primal** es, entonces, la manera más simple de cuantificar ese espacio vital entre cimas. No se trata sólo de contar números, sino de entender cómo crece y se contrae la estructura profunda de la secuencia de los primos, como si la naturaleza misma pulsara en el lenguaje de los enteros.

Definición 0.16 (Longitud del intervalo primal)**.** Para cada $k \geq 1$ se define la *longitud del intervalo* (o longitud de la brecha) L_k por

$$L_k := g_k - 1 = p_{k+1} - p_k - 1. \tag{0.16}$$

Interpretación: L_k es el número de enteros estrictamente intermedios entre p_k y p_{k+1}.

Observación 0.17. Para todo $k \geq 1$ se tiene $L_k \geq 0$. Además, $L_1 = 0$ (caso $(2, 3)$) y para $k \geq 2$ se cumple $L_k \geq 1$.

Proposición 0.18 (Paridad de g_k y L_k)**.** *Para $k \geq 2$ se cumple que g_k es par y, por tanto, L_k es impar. El único caso con g_k impar es $k = 1$ (pues $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$).*

Demostración. Para $k \geq 2$ tenemos p_k y p_{k+1} impares. La diferencia de dos números impares es par, luego g_k es par. Como $L_k = g_k - 1$, se deduce que L_k es impar. Para $k = 1$, $g_1 = 1$ y $L_1 = 0$. ■

Ejemplo 0.19 (Caso $p = 139$, $p' = 149$)**.**

$$g = 149 - 139 = 10 \quad \text{(par)}, \qquad L = g - 1 = 9 \quad \text{(impar)}.$$

Ejemplo 0.20 (Caso $p = 181$, $p' = 191$)**.**

$$g = 191 - 181 = 10 \quad \text{(par)}, \qquad L = g - 1 = 9 \quad \text{(impar)}.$$

Ejemplo 0.21 (Caso $p = 337$, $p' = 347$)**.**

$$g = 347 - 337 = 10 \quad \text{(par)}, \qquad L = g - 1 = 9 \quad \text{(impar)}.$$

Proposición 0.22 (Fórmula de la suma de enteros en un intervalo)**.** *Sea $k \geq 1$. La suma S_k de los enteros comprendidos entre p_k y p_{k+1} es*

$$S_k = \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}-1} n = \frac{(p_k + p_{k+1})(g_k - 1)}{2} = \frac{(p_k + p_{k+1})L_k}{2}. \tag{0.17}$$

Demostración. Los enteros intermedios forman una progresión aritmética con $r = L_k$ términos, primer elemento $p_k + 1$ y último $p_{k+1} - 1$. La suma de una progresión es

$$\frac{(a_1 + a_r)r}{2} = \frac{(p_k + 1 + p_{k+1} - 1)L_k}{2} = \frac{(p_k + p_{k+1})L_k}{2}.$$

■

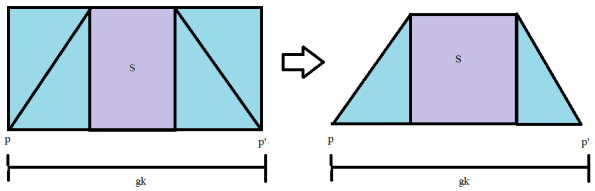


Figura 14: Trapecio de bloque de primos.

Ejemplo 0.23 (Caso $p = 137$, $p' = 139$)**.** Sea $p = 137$ y $p' = 139$. Entonces

$$g = 139 - 137 = 2, \quad L = g - 1 = 1.$$

El único número comprendido entre 137 y 139 es $\{138\}$. Por tanto,

$$S = 138.$$

Aplicando la fórmula:

$$S = \frac{(p + p')L}{2} = \frac{(137 + 139)(1)}{2} = \frac{276}{2} = 138,$$

lo cual confirma el resultado.

Ejemplo 0.24 (Caso $p = 547$, $p' = 563$)**.** Sea $p = 547$ y $p' = 563$. Entonces

$$g = 563 - 547 = 16, \quad L = g - 1 = 15.$$

Los enteros comprendidos entre 547 y 563 son

$$\{548, 549, 550, \ldots, 562\},$$

cuyo número de términos es 15. Su suma es

$$S = 548 + 549 + \cdots + 562.$$

Aplicando la fórmula:

$$S = \frac{(p + p')L}{2} = \frac{(547 + 563)(15)}{2} = \frac{1110 \cdot 15}{2} = 8325.$$

De manera directa, la suma de los enteros de 548 a 562 también da 8325, lo cual confirma el resultado.

Definición 0.25 (Discontinuidad discreta)**.** La sucesión $\{L_k\}$ presenta *discontinuidades discretas* cuando los valores J_k toman magnitudes grandes, lo cual refleja cambios abruptos en las brechas primales.

Ejemplo 0.26. Consideremos los intervalos primales $(293, 307)$ y $(317, 331)$. En ambos casos, la brecha es

$$307 - 293 = 331 - 317 = 13.$$

Este tamaño de salto contrasta fuertemente con las brechas pequeñas típicas (como 2 o 4 en los primos iniciales). Por tanto, $J_k = 13$ se interpreta como una *discontinuidad discreta*, reflejando un cambio abrupto en la dinámica de las brechas primales.

Definición 0.27 (Variación total de una sucesión)**.** Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y $m < n$ enteros. La *variación total* de $\{x_k\}$ en el tramo $[m, n]$ se define por

$$\mathrm{Var}(m, n) \;:=\; \sum_{k=m}^{n-1} \big|x_{k+1} - x_k\big|. \tag{0.18}$$

Decimos que la sucesión es de *variación acotada* si

$$\sum_{k=m}^{\infty} \big|x_{k+1} - x_k\big| < \infty \quad \text{(para algún/ todo } m\text{)}. \tag{0.19}$$

Teorema 0.28 (Cota de variación total — forma general)**.** *Sea $\{L_k\}$ una sucesión real y $m < n$. Entonces*

$$\mathrm{Var}(m, n) \;:=\; \sum_{k=m}^{n-1} \big|L_{k+1} - L_k\big| \;\le\; |L_m| \;+\; 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} |L_k| \;+\; |L_n|. \tag{0.20}$$

Demostración. Por la desigualdad triangular, para todo k se tiene

$$|L_{k+1} - L_k| \;\leq\; |L_{k+1}| + |L_k|.$$

Sumando de $k = m$ a $n-1$:

$$\mathrm{Var}(m,n) \;\leq\; \sum_{k=m}^{n-1} \big(|L_{k+1}| + |L_k|\big) = \underbrace{|L_m|}_{k=m} + \underbrace{|L_n|}_{k=n-1} + 2\sum_{k=m+1}^{n-1} |L_k|,$$

pues cada término interior $|L_k|$ aparece dos veces (en $k-1$ y k) y los extremos solo una vez. ■

Ejemplo 0.29. Para aplicar la cota con el intervalo $(293, 307)$, consideremos además el siguiente primo 311.

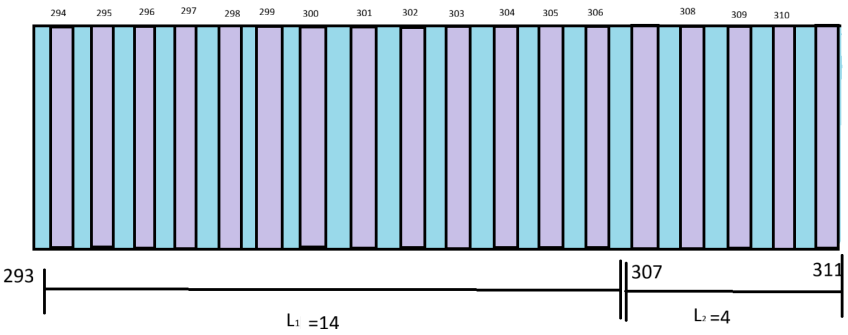


Figura 15: Longitudes de 293,311.

Las longitudes entre primos consecutivos son

$$L_1 = 307 - 293 = 14, \qquad L_2 = 311 - 307 = 4.$$

Tomemos $m = 1$ y $n = 2$. Entonces la variación total es

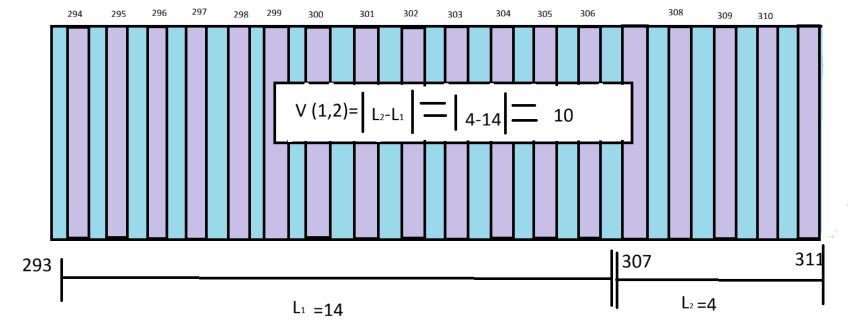


Figura 16: Longitudes de 293,311.

$$\text{Var}(1,2) = |L_2 - L_1| = |4 - 14| = 10.$$

Por el teorema,

$$\text{Var}(1,2) \leq L_1 + 2\sum_{k=2}^{1} L_k + L_2 = L_1 + L_2 = 14 + 4 = 18.$$

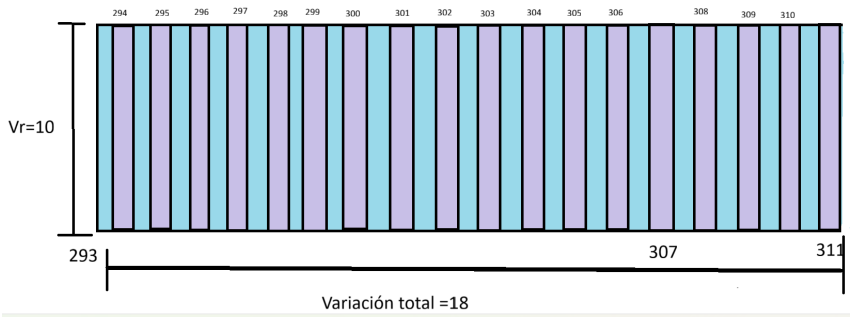


Figura 17: Variación Total de 293,311.

En efecto, $10 \leq 18$, verificando la desigualdad para el ejemplo centrado en la brecha principal 14 del intervalo $(293, 307)$.

Observación 0.30 (Conexión con teoría de números). El comportamiento de L_k y de $\text{Var}(1,n)$ se relaciona con conjeturas profundas como la de los primos gemelos y la de Cramér, que proponen estimaciones asintóticas para la magnitud de las brechas primales.

Medidas de salto discreto

Para describir cuantitativamente esta discontinuidad, se definen dos indicadores:

$$\text{Salto inmediato: } J_k := |L_{k+1} - L_k|,$$

$$\text{Variación total en el rango } [m,n]: \quad \text{Var}(m,n) := \sum_{k=m}^{n-1} |L_{k+1} - L_k|.$$

Un valor grande de J_k indica un cambio brusco en la longitud del intervalo, es decir, una discontinuidad marcada entre dos brechas consecutivas, mientras que la función $\text{Var}(m,n)$ mide la *acumulación de saltos* en un rango de intervalos, proporcionando una visión global de la inestabilidad.

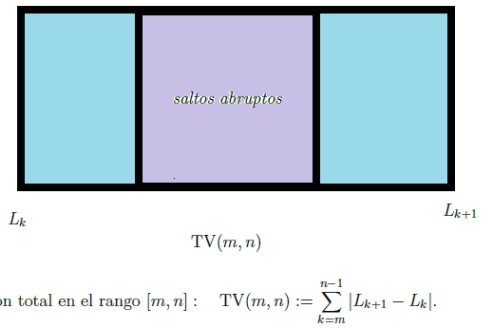


Figura 18: Saltos abruptos y variación total.

En conjunto, la noción de discontinuidad discreta en teoría de números permite analizar las irregularidades de los primos con herramientas similares a las del análisis, pero adaptadas a un contexto enteramente aritmético.

0.7. Aritmética básica de la longitud y la brecha

Es útil relacionar L_k con la *brecha prima*

$$L_k = g_k - 1. \tag{0.21}$$

Para $k \geq 2$ se tiene p_k impar, p_{k+1} impar y, por tanto, g_k es **par**; así, L_k es **impar**. El caso excepcional $p_1 = 2$ produce $g_1 = 1$ y $L_1 = 0$ (el único entero entre 2 y 3 es 1, que no es primo ni compuesto).

Observación 0.31 (Conteo y suma en el intervalo). Entre dos primos consecutivos $p_k < p_{k+1}$, todos los enteros estrictamente intermedios son compuestos, salvo el caso $(2, 3)$ donde aparece 1. Para $k \geq 2$, el número de compuestos es exactamente

$$L_k = g_k - 1,$$

y su suma corresponde a una progresión aritmética:

$$S_k = \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}-1} n = \frac{(p_k + 1 + p_{k+1} - 1)\,(g_k - 1)}{2} = \frac{(p_k + p_{k+1})(g_k - 1)}{2}. \tag{0.22}$$

0.8. Ejemplo sobre la brecha prima

Definimos la *brecha prima* como

$$g_k := p_{k+1} - p_k.$$

La *longitud del intervalo primal* es

$$L_k = g_k - 1.$$

Para $k \geq 2$ se cumple que p_k y p_{k+1} son impares, por lo que g_k es siempre **par**, y en consecuencia L_k es **impar**. El caso excepcional ocurre con $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$, donde $g_1 = 1$ y $L_1 = 0$ (pues el único entero entre 2 y 3 es 1, que no es primo ni compuesto).

Ejemplos con intervalos de salto 9

- Entre $p = 139$ y $p' = 149$:

$$g = 149 - 139 = 10, \quad L = 9.$$

Los enteros intermedios son $140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148$.

- Entre $p = 181$ y $p' = 191$:

$$g = 191 - 181 = 10, \quad L = 9.$$

Los enteros intermedios son $182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190$.

- Entre $p = 337$ y $p' = 347$:

$$g = 347 - 337 = 10, \quad L = 9.$$

Los enteros intermedios son $338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346$.

En síntesis: - La brecha g_k mide la separación directa entre dos primos consecutivos. - La longitud L_k indica cuántos números compuestos se encuentran en el intervalo entre ellos.

Definición 0.32 (Residuo modular del intervalo)**.** Sea $\{p_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión de los números primos y

$$S_k = \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}-1} n \tag{0.23}$$

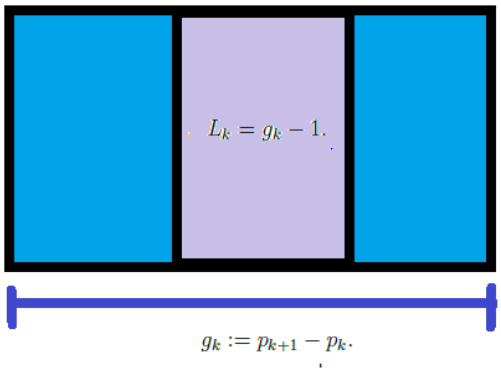


Figura 19: Brecha entre primos y longitud del intervalo.

la suma de los enteros comprendidos entre p_k y p_{k+1}, con $p_k \geq 3$.

Definición 0.33 (Residuo modular del intervalo)**.** Definimos el **residuo modular del intervalo** como

$$r_k \equiv \left(\frac{S_k}{2} - p_{k+1}\right) \pmod{p_k}. \tag{0.24}$$

Como p_k es impar para $k \geq 2$, el inverso 2^{-1} existe en $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$, y por tanto

$$r_k \equiv (S_k - 2p_{k+1}) \cdot (2^{-1} \bmod p_k) \pmod{p_k}.$$

El caso $(p_1, p_2) = (2, 3)$ puede definirse aparte o excluirse de los cálculos generales.

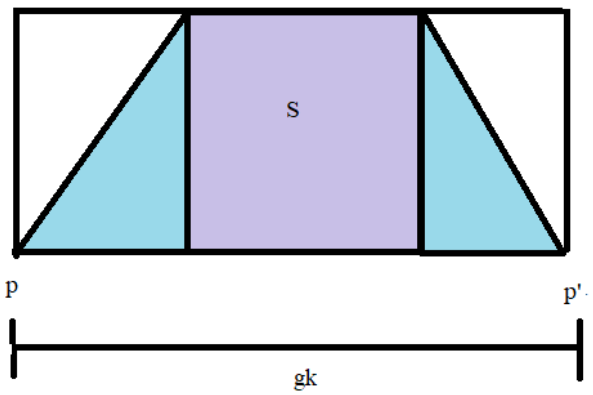


Figura 20: Residuo modular del intervalo parte blanca.

Ejemplo 0.34 (Residuo modular del intervalo $(137, 139)$)**.** Los compuestos intermedios son $\{138\}$, por lo que $S_k = 138$. Entonces:

$$r_k \equiv \left(\tfrac{138}{2} - 139\right) \pmod{137} = (69 - 139) \pmod{137} \equiv -70 \equiv 67 \pmod{137}.$$

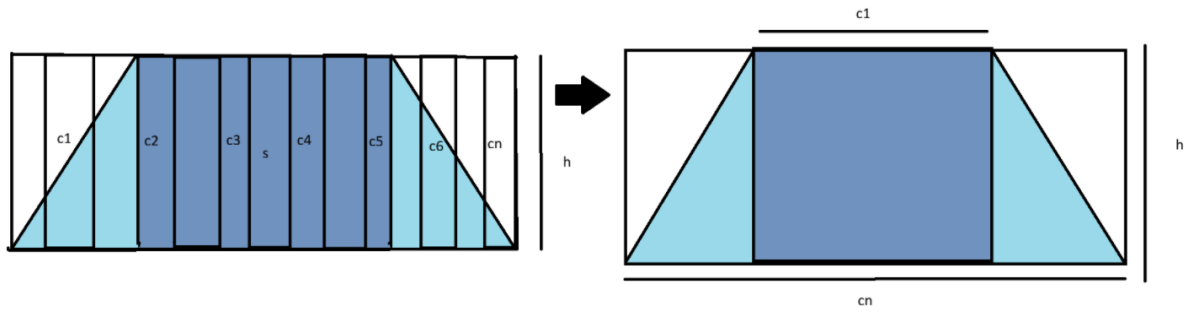


Figura 21: Tranformacion de sumatoria a proceso de trapecio.

Por tanto, $r_k = 67$.

Ejemplo 0.35 (Residuo modular del intervalo $(139, 149)$)**.** Los compuestos son $\{140, 141, \ldots, 148\}$, en total 9 términos.

Suma:

$$S_k = \frac{(140 + 148) \cdot 9}{2} = \frac{288 \cdot 9}{2} = 1296.$$

Entonces:

$$r_k \equiv \left(\tfrac{1296}{2} - 149\right) \pmod{139} = (648 - 149) \pmod{139}.$$

$$r_k \equiv 499 \pmod{139}.$$

Como $499 = 139 \cdot 3 + 82$, se concluye:

$$r_k = 82.$$

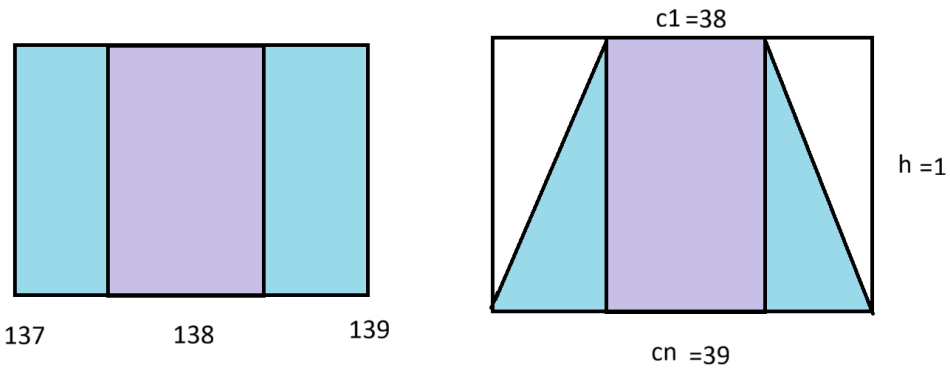


Figura 22: Residuo modular del intervalo parte blanca.

Ejemplo 0.36 (Residuo modular del intervalo $(181, 191)$)**.** Los compuestos son $\{182, 183, \ldots, 190\}$, en total 9 términos.

Suma:

$$S_k = \frac{(182 + 190) \cdot 9}{2} = \frac{372 \cdot 9}{2} = 1674.$$

Aplicamos:

$$r_k \equiv \left(\tfrac{1674}{2} - 191\right) \pmod{181} = (837 - 191) \pmod{181}.$$

$$r_k \equiv 646 \pmod{181}.$$

Como $646 = 181 \cdot 3 + 103$, se obtiene:

$$r_k = 103.$$

Ejemplo 0.37 (Residuo modular del intervalo $(547, 563)$)**.** Los compuestos son $\{548, 549, \ldots, 562\}$, en total 15 términos.

Suma:

$$S_k = \frac{(548 + 562) \cdot 15}{2} = \frac{1110 \cdot 15}{2} = 8325.$$

Aplicamos la definición:

$$r_k \equiv (8325 - 2 \cdot 563) \cdot (2^{-1} \bmod 547) \pmod{547}.$$

$$= (8325 - 1126) \cdot (2^{-1} \bmod 547) = 7199 \cdot (2^{-1} \bmod 547).$$

El inverso modular es $2^{-1} \equiv 274 \pmod{547}$, entonces:

$$r_k \equiv 7199 \cdot 274 \pmod{547}.$$

Reducimos $7199 \pmod{547}$:

$$7199 = 547 \cdot 13 + 78.$$

Así:

$$r_k \equiv 78 \cdot 274 \pmod{547} = 21372 \pmod{547}.$$

Como $21372 = 547 \cdot 39 + 69$, se concluye:

$$r_k = 69.$$

Definición 0.38 (Índice de estabilidad)**.** Dado un intervalo de primos consecutivos $[p_k, p_{k+1}]$, se define el **índice de estabilidad** E_k como una medida del comportamiento modular de los compuestos contenidos en dicho intervalo. Formalmente, E_k se calcula como la suma de los logaritmos naturales de los residuos modulares obtenidos al reducir sucesivamente la suma total de los compuestos S_k según los primos del intervalo:

$$E_k = \sum_i \ln(r_i). \tag{0.25}$$

donde cada r_i representa un residuo en la trayectoria de reducciones modulares de S_k.

Ejemplo 0.39. Sea el intervalo $[p_4, p_5] = [7, 11]$. Los números compuestos entre ellos son $8, 9, 10$, cuya suma es $S_4 = 27$. Reduciendo modularmente:

$$27 \text{ mód } 7 = 6, \quad 6 \text{ mód } 11 = 6.$$

Los residuos obtenidos son $\{6, 6\}$, por lo que el índice de estabilidad resulta:

$$E_4 = \ln(6) + \ln(6) = 2\ln(6) \approx 3{,}583.$$

Este valor relativamente alto indica que el intervalo $[7, 11]$ presenta una estructura menos "estable" o más irregular que otros intervalos más cortos.

Definición 0.40 (Discontinuidad primal)**.** La sucesión de primos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presenta una **discontinuidad primal** en el índice k cuando el índice de estabilidad E_k del intervalo $[p_k, p_{k+1}]$ difiere significativamente del índice anterior E_{k-1} asociado a $[p_{k-1}, p_k]$. Formalmente, existe una discontinuidad si

$$|E_k - E_{k-1}| > \delta, \qquad \delta \in \mathbb{R}^+.$$

Ejemplo 0.41. Consideremos los intervalos consecutivos $[p_3, p_4] = [5, 7]$ y $[p_4, p_5] = [7, 11]$. Del cálculo anterior, se tiene $E_3 = 0$ y $E_4 = 2\ln(6) \approx 3{,}583$. Si fijamos $\delta = 1$, entonces:

$$|E_4 - E_3| = 3{,}583 > 1.$$

Esto implica una *discontinuidad primal* en el índice $k = 4$, es decir, una ruptura en la

estabilidad entre ambos intervalos de primos.

Cuadro 1: Cálculo de los índices de estabilidad E_k para los primeros intervalos de primos.

k	Intervalo $[p_k, p_{k+1}]$	Compuestos	S_k	E_k
1	[2, 3]	–	0	0
2	[3, 5]	4	4	0
3	[5, 7]	6	6	0
4	[7, 11]	8, 9, 10	27	3.583
5	[11, 13]	12	12	0
6	[13, 17]	14, 15, 16	45	3.36
7	[17, 19]	18	18	0.58
8	[19, 23]	20, 21, 22	63	3.67
9	[23, 29]	24–28	130	5.04
10	[29, 31]	30	30	1.09
11	[31, 37]	32–36	170	5.14
12	[37, 41]	38–40	118	4.77
13	[41, 43]	42	42	1.22
14	[43, 47]	44–46	135	3.95
15	[47, 53]	48–52	250	5.52

Cuadro 2: Diferencias entre índices consecutivos y detección de discontinuidades primales ($\delta = 1$).

Par $(k, k+1)$	E_k	E_{k+1}	$\lvert E_{k+1} - E_k \rvert$ / Discontinuidad
(1,2)	0.00	0.00	0.00
(2,3)	0.00	0.00	0.00
(3,4)	0.00	3.583	**3.583**
(4,5)	3.583	0.00	**3.583**
(5,6)	0.00	3.36	**3.36**
(6,7)	3.36	0.58	**2.78**
(7,8)	0.58	3.67	**3.09**
(8,9)	3.67	5.04	**1.37**
(9,10)	5.04	1.09	**3.95**
(10,11)	1.09	5.14	**4.05**
(11,12)	5.14	4.77	0.37
(12,13)	4.77	1.22	**3.55**
(13,14)	1.22	3.95	**2.73**
(14,15)	3.95	5.52	**1.57**

0.9. Discontinuidades en los intervalos entre primos

0.10. Fundamentos conceptuales

En la naturaleza, los patrones más profundos rara vez son uniformes. Las montañas no crecen con alturas iguales, los ríos no fluyen en líneas rectas y las olas del mar no rompen con el mismo ritmo. Sin embargo, en medio de esa irregularidad aparente, existe una estructura: una alternancia entre alturas y descensos, entre calma y tensión, entre orden y caos.

De forma sorprendente, la distribución de los números primos parece obedecer una ley semejante. Si imaginamos la recta numérica como una cordillera infinita, cada número primo se alza como una cima solitaria, y los huecos entre ellos forman valles aritméticos que varían en profundidad y anchura. A veces las montañas son gemelas, separadas apenas por un suspiro los *primos gemelos*; otras veces, la distancia se vuelve abismal, como un desierto entre dos cimas distantes.

El estudio de esas irregularidades las *discontinuidades* entre los intervalos primales permite observar el relieve del universo numérico. Así como un geólogo mide la pendiente entre montañas, el matemático mide la longitud entre primos consecutivos.

Definición 0.42 (Crestas y valles)**.** Dada la sucesión de longitudes $\{L_n\}$, se dice que:

$$L_{n-1} < L_n > L_{n+1}. \tag{0.26}$$

L_n es un **valle** (mínimo local) si cumple:

$$L_{n-1} > L_n < L_{n+1}. \tag{0.27}$$

Cada cresta o valle representa una discontinuidad local.

Observación 0.43. Este concepto permite modelar el comportamiento irregular de los huecos primales: las crestas y valles reflejan cambios abruptos en la longitud de los intervalos.

Lema 0.44 (Oscilación permanente)**.** *La sucesión $\{L_n\}$ no es monótona. Todo máximo local está rodeado de valores menores, y todo mínimo local de valores mayores. Por tanto, la sucesión oscila indefinidamente.*

Corolario 0.45 (Paisaje de discontinuidades)**.** *El conjunto $\{L_n\}$ se puede visualizar como un paisaje irregular de* crestas *y* valles*, lo que implica que las discontinuidades son recurrentes y nunca desaparecen.*

Teorema 0.46 (Crecimiento del índice de discontinuidad)**.** *Sea* $D_n = |L_n - L_{n-1}|$*. Entonces:*

$$\limsup_{n\to\infty} D_n = \infty. \tag{0.28}$$

Es decir, existen saltos entre intervalos consecutivos tan grandes como se desee.

Demostración. Se sabe que los huecos entre primos pueden ser arbitrariamente grandes. Para cualquier M, existe un hueco $L_n > M$. Si este hueco sigue a uno pequeño (L_{n-1}), entonces $D_n = |L_n - L_{n-1}|$ será grande.

La existencia de primos gemelos ($L_n = 1$) asegura que siempre habrá transiciones de huecos mínimos a huecos enormes. Por tanto, $\limsup D_n = \infty$. ■

Ejemplo 0.47 (Aplicación del concepto)**.** Considérese la sucesión $5, 7, 11, 13, 17$. Los intervalos son $L = (1, 3, 1, 3)$. Aquí $L = 3$ es una **cresta**, flanqueada por valles de longitud 1, y $L = 1$ es un **valle**, rodeado de crestas.

Un ejemplo más contundente es el salto entre $(659, 661)$, con $L_{n-1} = 1$, y $(661, 677)$, con $L_n = 15$. Aquí:

$$D_n = |L_n - L_{n-1}| = |15 - 1| = 14,$$

lo cual muestra la magnitud de estas discontinuidades.

0.11. Ejercicio

Ejercicio 0.41. Sea el intervalo de primos consecutivos $(p_k, p_{k+1}) = (137, 139)$. (a) Calcula la brecha prima $g_k = p_{k+1} - p_k$. (b) Determina la longitud del intervalo primal $L_k = g_k - 1$ e interpreta su significado. (c) Explica por qué este caso representa una mínima discontinuidad primal y cómo se relaciona con los primos gemelos.

Ejercicio 0.42. Considera el intervalo de primos consecutivos $(139, 149)$. (a) Calcula g_k y L_k. (b) Enumera los enteros comprendidos entre 139 y 149 y verifica que todos (excepto 1, si aparece) son compuestos. (c) Interpreta el valor de L_k como un ejemplo de *salto discreto* respecto al intervalo anterior $(137, 139)$.

Ejercicio 0.43. Sea la sucesión de brechas primales $5, 7, 11, 13, 17$. (a) Calcula las longitudes correspondientes $L_k = p_{k+1} - p_k - 1$. (b) Identifica explícitamente las crestas (máximos locales) y los valles (mínimos locales) usando la definición del capítulo. (c) Explica por qué la sucesión $\{L_k\}$ no es monótona y qué significa esto en términos de oscilación aritmética.

Ejercicio 0.44. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (547, 563)$. (a) Calcula la brecha g_k y la longitud del intervalo L_k. (b) Utiliza la fórmula

$$S_k = \frac{(p_k + p_{k+1})L_k}{2}$$

para calcular la suma de todos los enteros en el intervalo. (c) Explica por qué esta suma corresponde exactamente a todos los compuestos entre los dos primos (ya que no pueden aparecer primos intermedios).

Ejercicio 0.45. Sea la sucesión de longitudes $\{L_k\}$. Define el salto inmediato $J_k := |L_{k+1} - L_k|$. (a) Elige dos intervalos consecutivos de primos con longitudes muy diferentes (por ejemplo, $(659, 661)$ y $(661, 677)$). (b) Calcula los valores L_k y L_{k+1}. (c) Determina J_k e interpreta por qué este valor representa una *discontinuidad primal fuerte*. (d) Explica cómo este fenómeno refleja la naturaleza impredecible de la distribución de los primos.

Ejercicio 0.46. Sea la sucesión de primos $p_k = 293$, $p_{k+1} = 307$ y $p_{k+2} = 311$. (a) Calcula las longitudes $L_k = p_{k+1} - p_k - 1$ y $L_{k+1} = p_{k+2} - p_{k+1} - 1$. (b) Determina el salto inmediato

$$J_k = |L_{k+1} - L_k|.$$

(c) Interpreta el significado geométrico de este salto en términos de "crestas" y "valles" de la sucesión de intervalos. (d) Explica por qué este ejemplo ilustra claramente una discontinuidad primal.

Ejercicio 0.47. Demuestra la proposición del capítulo: "Para $k \geq 2$, la brecha prima g_k es par y, por tanto, la longitud $L_k = g_k - 1$ es impar." (a) Argumenta utilizando que todos los primos mayores que 2 son impares. (b) Explica por qué la resta de dos impares es par. (c) Concluye formalmente el resultado. (d) Comenta qué ocurre en el caso excepcional $k = 1$.

Ejercicio 0.48. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (181, 191)$. (a) Calcula g_k y L_k. (b) Enumera los enteros intermedios y comprueba que todos son compuestos. (c) Calcula la suma de estos enteros usando la fórmula del capítulo y verifica el resultado con la suma directa. (d) Explica cómo este ejemplo refuerza la idea de "bloque compacto de compuestos" entre los primos.

Ejercicio 0.49. La sucesión de longitudes (L_k) oscila de manera permanente (no es monótona). (a) Elige tres intervalos consecutivos de primos reales (por ejemplo $(p_k, p_{k+1}), (p_{k+1}, p_{k+2}), (p_{k+2}$ (b) Calcula las longitudes correspondientes. (c) Verifica si se produce un patrón cresta–valle–cresta o valle–cresta–valle. (d) Explica por qué este comportamiento oscilatorio está presente incluso en rangos pequeños de primos y qué revela sobre la irregularidad de su distribución.

Ejercicio 0.50. Sea la sucesión de longitudes $\{L_k\}$. La variación total entre los índices m y n se define por

$$\mathrm{Var}(m,n) = \sum_{k=m}^{n-1} |L_{k+1} - L_k|.$$

(a) Elige cuatro o cinco primos consecutivos y calcula sus respectivas longitudes L_k. (b) Computa explícitamente la variación total en ese rango. (c) Interpreta el resultado como una medida de la "inestabilidad acumulada" entre esos intervalos. (d) Explica por qué una variación total grande implica una alta presencia de discontinuidades prímales.

Ejercicio 0.51. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (43, 47)$ y $(p_{k+1}, p_{k+2}) = (47, 53)$. (a) Calcula las longitudes L_k y L_{k+1}. (b) Determina el salto inmediato $J_k = |L_{k+1} - L_k|$. (c) Representa los valores sobre una recta numérica y comenta el contraste entre ambos intervalos. (d) Explica si el cambio puede considerarse una *discontinuidad primal fuerte*.

Ejercicio 0.52. Sea el intervalo $(p_k, p_{k+1}) = (73, 79)$. (a) Calcula g_k y L_k. (b) Usa la fórmula $S_k = \frac{(p_k + p_{k+1})L_k}{2}$ para obtener la suma de los compuestos. (c) Interpreta S_k como la "energía interna" del intervalo y razona si su valor alto indica mayor inestabilidad en el paisaje primal.

Ejercicio 0.53. El *índice de discontinuidad local* se define como $D_k = |L_k - L_{k-1}|$. (a) Calcula D_k para tres posiciones consecutivas de la sucesión $\{L_k\}$. (b) Analiza si los valores grandes de D_k se asocian a brechas más irregulares. (c) Describe cómo D_k permite medir la fuerza del salto entre dos regiones del espectro de primos.

Ejercicio 0.54. Considera los intervalos $(293, 307)$, $(307, 311)$ y $(311, 313)$. (a) Calcula las longitudes L_1, L_2, L_3. (b) Determina los saltos $J_1 = |L_2 - L_1|$ y $J_2 = |L_3 - L_2|$. (c) Compara la magnitud relativa de los saltos y comenta cuál genera una mayor discontinuidad. (d) Describe cómo estos ejemplos muestran la coexistencia de intervalos amplios y casi nulos.

Ejercicio 0.55. Sea la variación total $\mathrm{Var}(m, n)$ definida en el capítulo. (a) Selecciona cinco intervalos consecutivos de primos y calcula los correspondientes L_k. (b) Evalúa $\mathrm{Var}(m, n)$ y discute su significado como medida de "rugosidad" del paisaje de brechas. (c) Explica por qué una sucesión $\{L_k\}$ con variación total finita sería excepcional desde el punto de vista de la teoría de números.

Ejercicio 0.56. Sea el intervalo $(p_k, p_{k+1}) = (311, 313)$ y el siguiente $(p_{k+1}, p_{k+2}) = (313, 317)$. (a) Calcula g_k, g_{k+1} y sus longitudes $L_k = g_k - 1$, $L_{k+1} = g_{k+1} - 1$. (b) Determina el salto inmediato $J_k = |L_{k+1} - L_k|$. (c) Interpreta el resultado como una discontinuidad local y discute si existe una "cresta" o un "valle". (d) Comenta cómo cambiaría J_k si en vez de $(311, 313)$ consideraras $(313, 317)$ y $(317, 331)$.

Ejercicio 0.57. (Variación total en una ventana corta). Elige cinco primos consecutivos entre $[300, 400]$ y forma las longitudes correspondientes L_k de los cuatro intervalos inducidos. (a) Calcula la variación total $\mathrm{Var}(m, m+4) = \sum_{j=m}^{m+3} |L_{j+1} - L_j|$. (b) Interpreta este valor como "inestabilidad acumulada". (c) ¿Observas algún par adyacente que concentre la mayor parte de la variación? (d) Explica qué diría este experimento si repites el procedimiento en una ventana más alejada (por ejemplo, $[1000, 1100]$).

Ejercicio 0.58. (Paridad estructural). Demuestra que para $k \geq 2$, g_k es par y L_k es impar. (a) Justifica que todos los primos p_k con $k \geq 2$ son impares. (b) Deduce que la diferencia de impares es par. (c) Concluye que $L_k = g_k - 1$ es impar. (d) Analiza separadamente el caso $(p_1, p_2) = (2, 3)$ e interpreta por qué $L_1 = 0$.

Ejercicio 0.59. (Cota de la suma en bloque). Sea (p_k, p_{k+1}) con longitud L_k. (a) Demuestra que la suma de enteros intermedios satisface

$$S_k = \frac{(p_k + p_{k+1})\, L_k}{2}.$$

(b) Interpreta esta fórmula como el área de un trapecio aritmético. (c) Elige un ejemplo concreto (por ejemplo $(547, 563)$) y verifica la igualdad calculando S_k por ambos métodos (fórmula y suma directa).

Ejercicio 0.60. (Comparación de bloques contiguos). Toma tres intervalos consecutivos $(p_k, p_{k+1}), (p_{k+1}, p_{k+2}), (p_{k+2}, p_{k+3})$. (a) Calcula L_k, L_{k+1}, L_{k+2}. (b) Determina los saltos J_k, J_{k+1}. (c) Decide si aparece el patrón cresta–valle–cresta o valle–cresta–valle. (d) Discute qué pautas (si alguna) se repiten al desplazar la ventana varias posiciones hacia adelante.

Ejercicio 0.61. (Discontinuidad fuerte). Construye un ejemplo con dos intervalos consecutivos donde el primero sea muy pequeño (p. ej., primos gemelos) y el segundo muy grande (una brecha amplia documentada). (a) Calcula L_k y L_{k+1}. (b) Evalúa $J_k = |L_{k+1} - L_k|$ y explica por qué este J_k es un testigo de discontinuidad pronunciada. (c) Interpreta la situación con la metáfora de "valles y acantilados" del paisaje primal.

Ejercicio 0.62. (Descomposición fina de S_k). Para un intervalo (p_k, p_{k+1}), separa los compuestos intermedios en pares e impares:

$$\{p_k + 1, \ldots, p_{k+1} - 1\} = A_{\text{par}} \cup A_{\text{impar}}.$$

(a) Expresa S_k como suma sobre A_{par} y A_{impar}. (b) Obtén fórmulas cerradas para cada contribución. (c) Comenta qué revela esta descomposición sobre la estructura interna del bloque de compuestos.

Ejercicio 0.63. (Cotas de variación total). Sea una ventana de índices $[m, n]$ para la sucesión $\{L_k\}$. (a) Demuestra la cota

$$\mathrm{Var}(m, n) \leq |L_m| + 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} |L_k| + |L_n|.$$

(b) Interpreta la doble ponderación de los términos intermedios. (c) Elige un tramo concreto de cuatro o cinco intervalos y verifica numéricamente la desigualdad. (d) Explica cuándo la cota podría ser "floja" y cuándo se acerca al valor real.

Ejercicio 0.64. (Crestas y valles como detectores de salto). (a) Da una condición puramente en términos de L_{k-1}, L_k, L_{k+1} para que L_k sea una cresta o un valle. (b) Elige cinco valores consecutivos de L y clasifícalos. (c) Relaciona el número de crestas en la muestra con la variación total observada. (d) ¿Puede una muestra con muchas crestas tener poca variación total? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 0.65. (Construcción con progresiones aritméticas). Considera la suma de intermedios como una progresión aritmética de diferencia 1. (a) Relaciona el centro del intervalo (p_k, p_{k+1}) con el promedio de los intermedios. (b) Explica cómo esta observación permite reinterpretar S_k como "masa centrada" del bloque. (c) Elige dos intervalos de longitudes distintas y compara sus promedios y S_k.

Ejercicio 0.66. (Comparativa de ventanas separadas). (a) Toma dos ventanas disjuntas de cinco primos consecutivos, una en el rango $[100, 300]$ y otra en $[1000, 1300]$. (b) Calcula las longitudes y la variación total de cada ventana. (c) Compara los resultados y reflexiona si "más lejos" implica necesariamente mayor inestabilidad. (d) Discute las limitaciones de interpretar datos locales para inferencias globales.

Ejercicio 0.67. (Discontinuidad por cambio de paridad local). Aunque L_k es impar para $k \geq 2$, su magnitud varía. (a) Elige tres intervalos con L pequeños (e.g., $1, 3, 5$) y tres con L más grandes (e.g., $9, 11, 15$). (b) Calcula los saltos entre cada par adyacente. (c) Describe cómo una secuencia de L todos impares puede exhibir saltos enormes y, por tanto, discontinuidad fuerte.

Ejercicio 0.68. (Umbral de discontinuidad). Fija un umbral $\Delta > 0$ y define que hay "discontinuidad notable" en k si $|L_{k+1} - L_k| > \Delta$. (a) Para una lista de veinte intervalos consecutivos, marca los índices que superan el umbral. (b) Calcula la proporción de discontinuidades notables. (c) Comenta cómo cambia esta proporción al variar Δ (pequeño, mediano, grande).

Ejercicio 0.69. (Oscilación permanente). (a) Selecciona una muestra de $\{L_k\}$ y muestra que no es monótona al menos en tres subtramos distintos. (b) Identifica pares $(k, k+1)$

donde $L_{k+1} \gg L_k$ y otros donde $L_{k+1} \ll L_k$. (c) Interpreta estas oscilaciones como evidencia de un terreno primal con "crestas" y "valles" recurrentes.

Ejercicio 0.70. (Discontinuidad mediante índices normalizados). Define el índice normalizado

$$\widehat{J}_k := \frac{|L_{k+1} - L_k|}{L_k + 1}.$$

(a) Motiva la normalización por $L_k + 1$. (b) Calcula $\widehat{J}_k$ en una muestra concreta y ordénalos de mayor a menor. (c) ¿Qué detecta mejor las rupturas: J_k o $\widehat{J}_k$? Justifica con tus datos.

Ejercicio 0.71. (Interrelación S_k–discontinuidad). (a) Elige dos intervalos consecutivos y calcula S_k y S_{k+1}. (b) Compara $|S_{k+1} - S_k|$ con $J_k = |L_{k+1} - L_k|$. (c) Discute si grandes saltos en longitud necesariamente implican grandes saltos en suma (teniendo en cuenta que S_k también depende de $p_k + p_{k+1}$).

Ejercicio 0.72. (Cota inferior trivial para S_k). (a) Muestra que $S_k \geq L_k \cdot (p_k + 1)$, e igualmente $S_k \leq L_k \cdot (p_{k+1} - 1)$. (b) Interpreta estas cotas como "cajas" mínima y máxima del bloque. (c) Discute la utilidad práctica de estas cotas frente a la fórmula exacta.

Ejercicio 0.73. ("Rugosidad" relativa). Define

$$R_{m,n} := \frac{\mathrm{Var}(m, n)}{\sum_{k=m}^{n} L_k}.$$

(a) Explica qué mide $R_{m,n}$ como índice adimensional. (b) Calcula $R_{m,n}$ para dos ventanas distintas y compáralos. (c) ¿Qué tipo de paisaje (suave vs. abrupto) se asocia a valores altos de $R_{m,n}$?

Ejercicio 0.74. (Detección de crestas dominantes). (a) En una secuencia de diez L_k, localiza las tres mayores longitudes. (b) Calcula los saltos adyacentes a cada una. (c) ¿Concentran estas "crestas dominantes" la mayor parte de la variación total? (d) Interpreta el fenómeno con la metáfora de picos montañosos.

Ejercicio 0.75. (Comparación de extremos). (a) Elige un par de intervalos consecutivos con L muy pequeño y otro par con L muy grande. (b) Calcula J_k en cada caso. (c) Explica qué par exhibe mayor discontinuidad y por qué. (d) Relaciona tus observaciones con la afirmación "existen saltos tan grandes como se desee".

Ejercicio 0.76. (Discontinuidad y media móvil). Define la media móvil de orden 3 por

$$M_k := \frac{L_{k-1} + L_k + L_{k+1}}{3}.$$

(a) Calcula M_k para cinco posiciones consecutivas. (b) Identifica dónde $|L_k - M_k|$ es máximo. (c) Interpreta estas desviaciones como focos locales de discontinuidad.

Ejercicio 0.77. (Umbral relativo). Fija $\alpha \in (0,1)$ y declara "salto relativo" cuando

$$|L_{k+1} - L_k| > \alpha \cdot \max\{L_k, L_{k+1}\}.$$

(a) Para una muestra de veinte intervalos, marca los índices que cumplen la condición para $\alpha = 1/2$. (b) Repite con $\alpha = 1/3$ y compara. (c) Discute qué versión (absoluta J_k o relativa) se ajusta mejor a tu intuición de discontinuidad.

Ejercicio 0.78. (Configuraciones alternantes). (a) Construye (o encuentra) una secuencia local con patrón alternante L pequeño–grande–pequeño–grande. (b) Calcula la variación total en esa ventana. (c) Explica por qué patrones alternantes maximizan la "rugosidad" local.

Ejercicio 0.79. (Desviación cuadrática). Define

$$Q_{m,n} := \sum_{k=m}^{n} (L_k - \overline{L})^2, \quad \text{donde } \overline{L} = \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} L_k.$$

(a) Calcula $Q_{m,n}$ en una ventana concreta. (b) Relaciona $Q_{m,n}$ con la dispersión de longitudes. (c) Comenta sus similitudes y diferencias con la variación total $\mathrm{Var}(m,n)$.

Ejercicio 0.80. ("Cresta sorprendente"). (a) Encuentra un índice donde L_k sea inusualmente grande respecto de sus vecinos. (b) Mide J_{k-1} y J_k. (c) Discute si la "sorpresa" se refleja más en uno de los lados, y qué implicaría para detectar discontinuidades asimétricas.

Ejercicio 0.81. (Comparativa S_k normalizado). Considera

$$\widehat{S}_k := \frac{S_k}{p_{k+1}} = \frac{(p_k + p_{k+1})L_k}{2p_{k+1}}.$$

(a) Calcula $\widehat{S}_k$ en cinco intervalos y ordénalos. (b) Discute si $\widehat{S}_k$ correlaciona con L_k o si el peso de $p_k + p_{k+1}$ altera el ranking. (c) Relaciona esta normalización con la idea de "energía relativa" del bloque.

Ejercicio 0.82. (Conjetura empírica). Formula una conjetura cualitativa sobre la frecuencia de saltos grandes J_k en ventanas largas. (a) Describe cómo la verificarías empíricamente. (b) Señala qué evidencias (gráficas, estadísticas) te parecerían convincentes. (c) Explica qué dificultades teóricas aparecen al intentar demostrarla rigurosamente.

Ejercicio 0.83. (Estudio de caso completo). Elige un bloque de siete primos consecutivos. (a) Calcula todas las L_k y los J_k intermedios. (b) Calcula Var en toda la ventana. (c)

Identifica crestas y valles. (d) Resume en un párrafo qué dice este bloque sobre el “paisaje de discontinuidades” local.

CAPÍTULO 3. NUEVO CONJUNTO D DE BLOQUES NÚCLEO DE NÚMEROS PRIMOS

Introducción

En la naturaleza, nada crece de manera perfectamente uniforme. Los árboles no aparecen a distancias iguales entre sí; las olas del mar no rompen con la misma fuerza; las montañas no mantienen una altura constante. La vida se organiza en patrones irregulares, pero esa irregularidad no es caos: es estructura escondida.

Algo muy similar ocurre con los números primos.

Cuando observamos su distribución sobre la recta numérica, encontramos saltos impredecibles: a veces dos primos están muy cerca; otras veces, se separan ampliamente. Estas diferencias entre primos consecutivos forman los llamados *intervalos de discontinuidad*. Cada uno de esos intervalos es como el espacio entre dos montañas: un valle aritmético lleno de números compuestos.

Pero, así como en la naturaleza cada valle tiene una forma particular (más profundo, más ancho, más inclinado), también cada intervalo primal tiene una estructura interna única. No todos los huecos entre primos son iguales: ocultan simetrías, centros, promedios, patrones residuales.

Este capítulo expone el origen de la teoría propuesta. La irregularidad en la distribución de los primos, evidenciada en los *intervalos de discontinuidad*, conduce a la construcción de un nuevo objeto: el **conjunto D de bloques núcleo**.

La idea es simple y poderosa: **dentro de cada intervalo (p_k, p_{k+1}) existe un punto central oculto, un "corazón" del intervalo**. Ese punto concentra el equilibrio interno del bloque de compuestos que se encuentran entre los primos. A ese valor lo llamamos *núcleo de la discontinuidad*.

Así como en una cadena montañosa cada valle tiene un centro geográfico o una cuenca natural donde fluye toda el agua, en la aritmética de los primos cada intervalo

tiene un centro matemático: su núcleo N_k.

A partir de este núcleo surge un nuevo conjunto dentro de la teoría de números: un catálogo completo de todos los centros de los intervalos primales. Ese conjunto es D, el *conjunto de bloques núcleo*. En él no estudiamos los primos directamente, sino la energía aritmética que queda atrapada entre ellos.

Este cambio de enfoque es profundo: de mirar las cimas (los primos), pasamos a estudiar los valles (los compuestos) y descubrimos que esos valles también contienen orden.

0.12. Núcleo de la discontinuidad

Figura 23: Así como en una cadena montañosa cada valle tiene su cuenca donde converge el flujo natural, en la aritmética de los primos cada intervalo posee un centro invisible: el **núcleo** N_k. De estos núcleos surge el conjunto D, formado por los *bloques núcleo*, que representan los puntos de equilibrio entre los números primos.

Definición 0.48 (Núcleo de la discontinuidad)**.** Sea (p_k, p_{k+1}) un intervalo primal con $k \geq 2$ y

$$L_k = p_{k+1} - p_k - 1, \qquad S_k = \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}-1} n. \tag{0.29}$$

La media aritmética de los enteros (todos compuestos) del intervalo es

$$\widetilde{S}_k = \frac{S_k}{L_k} = \frac{p_k + p_{k+1}}{2}. \tag{0.30}$$

Definimos el **núcleo de la discontinuidad** N_k como el *menor residuo positivo* de $\widetilde{S}_k$ módulo p_k:

$$N_k \equiv \widetilde{S}_k \pmod{p_k}, \qquad N_k \in \{1, 2, \ldots, p_k - 1\}. \tag{0.31}$$

En particular, para $k \geq 2$ se tiene

$$N_k = \frac{p_{k+1} - p_k}{2}. \tag{0.32}$$

Ejemplo 1: Intervalo (7, 11)

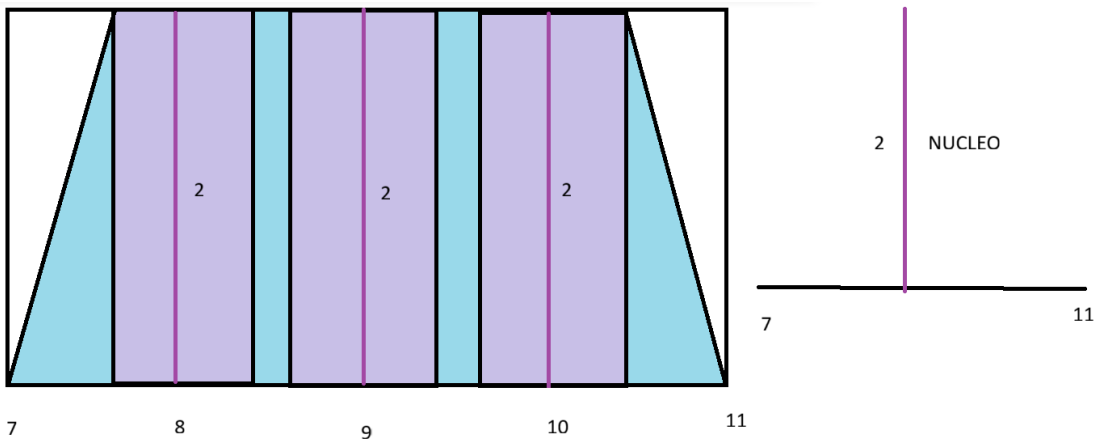


Figura 24: Núcleo: 1 en intervalo (7-11).

Compuestos intermedios:

$$\{8, 9, 10\}.$$

Suma:

$$S_k = 8 + 9 + 10 = 27.$$

Media aritmética:

$$\widetilde{S}_k = 27.$$

Residuo:

$$r \equiv (27 - 11) \pmod{7} = 16 \pmod{7} = 2.$$

Reducción: $2 \to 1$ (primo residual $= 2$).

$$N_k = 2, \quad \text{Primo residual } = 2.$$

Ejemplo 2: Intervalo (47, 53)

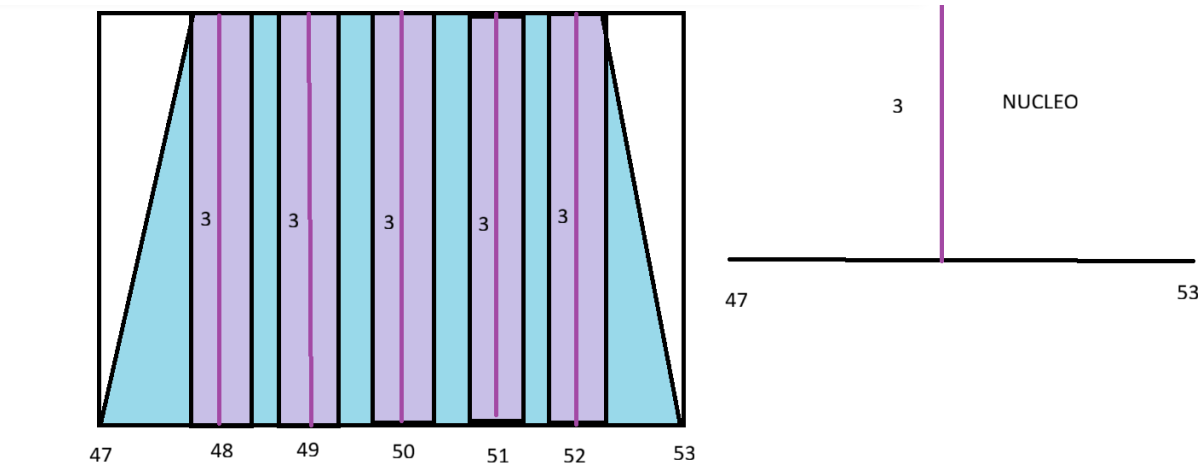


Figura 25: Núcleo: 3 en intervalo (47-53).

Compuestos:

$$\{48, 49, 50, 51, 52\}.$$

Suma:

$$S_k = 48 + 49 + 50 + 51 + 52 = 250.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 250.$$

Residuo:

$$r \equiv (250 - 53) \pmod{47} = 197 \pmod{47} = 9.$$

Reducción:

$$9 \to 3.$$

$$N_k = 9, \quad \text{Primo residual } = 3.$$

Ejemplo 3: Intervalo (61, 67)

Compuestos:

$$\{62, 63, 64, 65, 66\}.$$

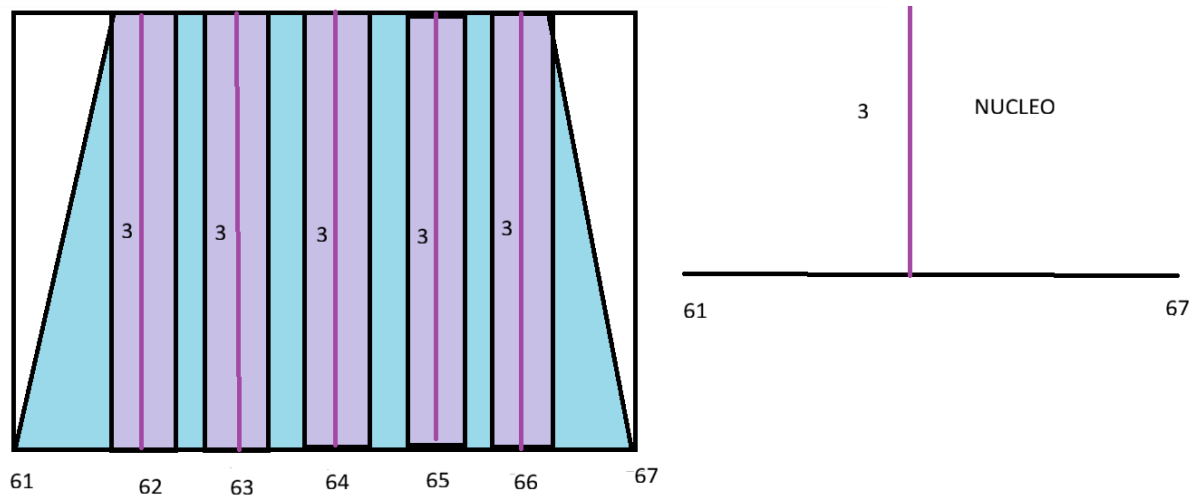


Figura 26: Núcleo: 3 en intervalo (61-67).

Suma:

$$S_k = 62 + 63 + 64 + 65 + 66 = 320.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 320.$$

Residuo:

$$r \equiv (320 - 67) \pmod{61} = 253 \pmod{61} = 9.$$

Reducción:

$$9 \to 3.$$

$$N_k = 9, \quad \text{Primo residual } = 3.$$

Ejemplo 4: Intervalo (23, 29)

Compuestos:

$$\{24, 25, 26, 27, 28\}.$$

Suma:

$$S_k = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 130.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 130.$$

Residuo:

$$r \equiv (130 - 29) \pmod{23} = 101 \pmod{23} = 9.$$

Reducción:

$$9 \to 3.$$

$$N_k = 9, \quad \text{Primo residual } = 3.$$

Ejemplo 5: Intervalo (3, 5)

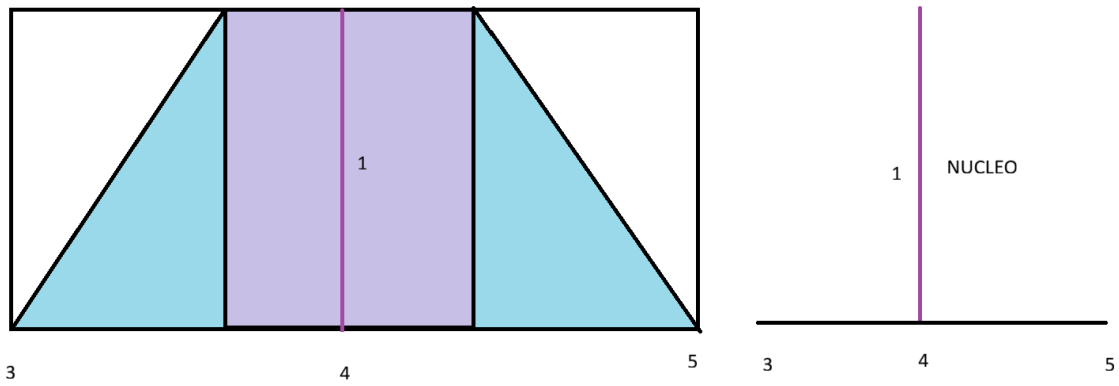


Figura 27: Núcleo: 1 en intervalo (3-5).

Compuestos intermedios:

$$\{4\}.$$

Suma:

$$S_k = 4.$$

Media aritmética:

$$\widetilde{S_k} = 4.$$

Residuo:

$$r \equiv (4-5) \pmod 3 = -1 \pmod 3 = 2.$$

Reducción:

$$N_k = 2, \quad \text{Primo residual } = 2.$$

Tabla 1: Intervalos iniciales (2–97)

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos	Observación	Núcleo N_k
(2–3)	–	0	Sin números compuestos	–
(3–5)	3, 5	1	Un número compuesto	1
(5–7)	5, 7	1	Un número compuesto	1

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos	Observación	Núcleo N_k
(7–11)	7, 11	3	Tres números compuestos	2
(11–13)	11, 13	1	Un número compuesto	1
(13–17)	13, 17	3	Tres números compuestos	2
(17–19)	17, 19	1	Un número compuesto	1
(19–23)	19, 23	3	Tres números compuestos	2
(23–29)	23, 29	5	Cinco números compuestos	3
(29–31)	29, 31	1	Un número compuesto	1
(31–37)	31, 37	5	Cinco números compuestos	3
(37–41)	37, 41	3	Tres números compuestos	2
(41–43)	41, 43	1	Un número compuesto	1
(43–47)	43, 47	3	Tres números compuestos	2
(47–53)	47, 53	5	Cinco números compuestos	3
(53–59)	53, 59	5	Cinco números compuestos	3
(59–61)	59, 61	1	Un número compuesto	1
(61–67)	61, 67	5	Cinco números compuestos	3
(67–71)	67, 71	3	Tres números compuestos	2
(71–73)	71, 73	1	Un número compuesto	1
(73–79)	73, 79	5	Cinco números compuestos	3
(79–83)	79, 83	3	Tres números compuestos	2
(83–89)	83, 89	5	Cinco números compuestos	3
(89–97)	89, 97	7	Siete números compuestos	4

Comentario sobre la Tabla 1: En intervalos muy pequeños (p. ej. (3–5), (5–7), (11–13)) el núcleo resulta $N_k = 1$, lo que indica una huella mínima de discontinuidad. En cambio, en intervalos mayores como (89–97) el núcleo crece ($N_k = 4$), reflejando que el promedio de los compuestos se aleja más del primo inicial. Así, la tabla evidencia cómo el tamaño del intervalo incide directamente en la magnitud del núcleo.

Ejemplo 1: Intervalo (139, 149)

Compuestos:

$$\{140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148\}.$$

Suma:

$$S_k = 140 + \cdots + 148 = 1386.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 1386.$$

Residuo:

$$r \equiv (1386 - 149) \pmod{139} = 1237 \pmod{139} = 125.$$

Reducción:

$$125 \to 5.$$

$$N_k = 125, \quad \text{Primo residual } = 5.$$

Ejemplo 2: Intervalo (547, 563)

Compuestos:

$$\{548, \ldots, 562\}.$$

Suma:

$$S_k = 548 + \cdots + 562 = 8325.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 8325.$$

Residuo:

$$r \equiv (8325 - 563) \pmod{547} = 7762 \pmod{547} = 94.$$

Reducción:

$$94 \to 2.$$

$$N_k = 94, \quad \text{Primo residual } = 2.$$

Ejemplo 3: Intervalo (541, 547)

Compuestos:

$$\{542, 543, 544, 545, 546\}.$$

Suma:

$$S_k = 542 + \cdots + 546 = 2720.$$

Media:

$$\widetilde{S_k} = 2720.$$

Residuo:

$$r \equiv (2720 - 547) \pmod{541} = 2173 \pmod{541} = 11.$$

Reducción:

$$N_k = 11, \quad \text{Primo residual } = 11.$$

0.13. Propiedades básicas del núcleo y del conjunto D

Entre dos números primos consecutivos no hay silencio aritmético, sino una breve respiración del número. Ese espacio, lleno de compuestos, guarda una simetría: el punto medio exacto que equilibra la distancia entre ambos primos. A ese punto lo llamamos *núcleo del intervalo* y lo denotamos por N_k. Su comportamiento está gobernado por una identidad sorprendentemente simple.

Definición 0.49 (Bloque núcleo y conjunto D)**.** Para cada intervalo primal (p_k, p_{k+1}) con $k \geq 2$, definimos el *bloque núcleo*

$$B_k \;=\; \{\, p_k + 1,\; p_k + 2,\; \ldots,\; p_{k+1} - 1 \,\}. \tag{0.33}$$

y su parámetro núcleo N_k como en la Definición anterior. El **conjunto D de bloques núcleo** es

$$D \;=\; \{\, B_k : k \geq 2 \,\}. \tag{0.34}$$

Ejemplo (5,7).

Ejemplo (7,11).

Ejemplo 5: Intervalo (5,7)

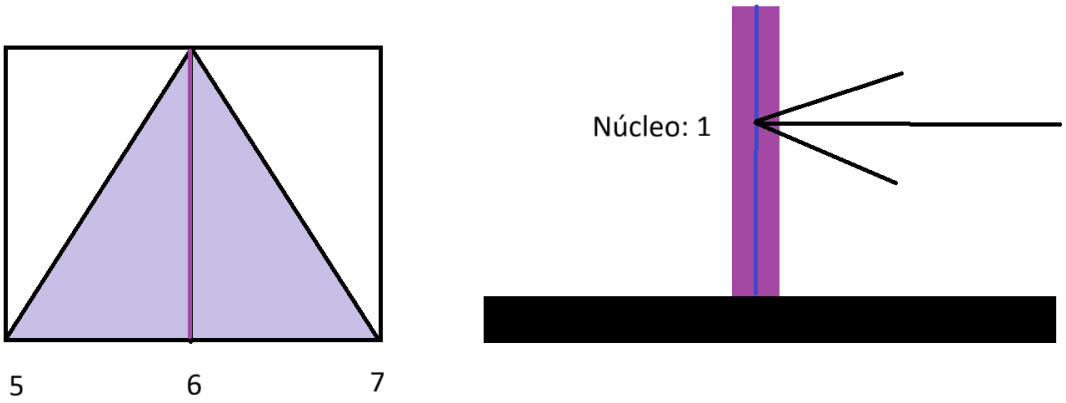


Figura 28: Núcleo: 1 en intervalo (5-7).

Entre los primos 5 y 7 sólo está el entero 6, así que

$$B_k = \{6\}, \qquad L_k = |B_k| = 1.$$

La suma de los compuestos del intervalo es $S_k = 6$ y la media aritmética

$$\widetilde{S}_k = \frac{S_k}{L_k} = \frac{6}{1} = 6 = \frac{5+7}{2}.$$

El núcleo se define como el menor residuo positivo de $\widetilde{S}_k$ módulo $p_k = 5$:

$$N_k \equiv 6 \pmod 5 \equiv 1.$$

Verificación con la brecha $g_k = 7 - 5 = 2$: entonces $N_k = g_k/2 = 1$, coincidente. El centro del bloque es

$$m_k = \frac{5+7}{2} = 6 = p_k + N_k = 5 + 1.$$

Los enteros estrictamente entre 7 y 11 son $8, 9, 10$; por tanto,

$$B_k = \{8, 9, 10\}, \qquad L_k = 3, \qquad S_k = 8 + 9 + 10 = 27.$$

La media es

$$\widetilde{S}_k = \frac{S_k}{L_k} = \frac{27}{3} = 9 = \frac{7+11}{2}.$$

El núcleo:

$$N_k \equiv 9 \pmod 7 \equiv 2.$$

La brecha es $g_k = 11 - 7 = 4$ y $N_k = g_k/2 = 2$, lo cual coincide. El centro:

$$m_k = \frac{7+11}{2} = 9 = p_k + N_k = 7 + 2.$$

Ejemplo (11,13). Aquí sólo aparece el entero 12, de modo que

$$B_k = \{12\}, \qquad L_k = 1, \qquad S_k = 12, \qquad \widetilde{S}_k = \frac{12}{1} = 12 = \frac{11+13}{2}.$$

El núcleo se obtiene como

$$N_k \equiv 12 \pmod{11} \equiv 1,$$

y coincide con $g_k/2 = (13 - 11)/2 = 1$. El centro es

$$m_k = \frac{11+13}{2} = 12 = p_k + N_k = 11 + 1.$$

Ejemplo (23,29). Entre 23 y 29 tenemos cinco enteros: $24, 25, 26, 27, 28$.

$$B_k = \{24, 25, 26, 27, 28\}, \qquad L_k = 5, \qquad S_k = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 130.$$

La media resulta

$$\widetilde{S}_k = \frac{130}{5} = 26 = \frac{23+29}{2}.$$

Núcleo por congruencia:

$$N_k \equiv 26 \pmod{23} \equiv 3.$$

La brecha es $g_k = 29 - 23 = 6$, luego $N_k = g_k/2 = 3$. El centro del bloque:

$$m_k = \frac{23+29}{2} = 26 = p_k + N_k = 23 + 3.$$

Ejemplo (47,53). Los enteros intermedios son $48, 49, 50, 51, 52$:

$$B_k = \{48, 49, 50, 51, 52\}, \qquad L_k = 5, \qquad S_k = 48+49+50+51+52 = 250.$$

La media es

$$\widetilde{S}_k = \frac{250}{5} = 50 = \frac{47+53}{2}.$$

El núcleo:

$$N_k \equiv 50 \pmod{47} \equiv 3.$$

Como $g_k = 53 - 47 = 6$, se verifica $N_k = g_k/2 = 3$. El centro:

$$m_k = \frac{47+53}{2} = 50 = p_k + N_k = 47 + 3.$$

Ejemplo (89,97). En este intervalo aparecen siete enteros compuestos:

$$B_k = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96\}.$$

Así,

$$L_k = 7, \qquad S_k = 90+91+92+93+94+95+96 = 651, \qquad \widetilde{S}_k = \frac{651}{7} = 93 = \frac{89+97}{2}.$$

El núcleo es

$$N_k \equiv 93 \pmod{89} \equiv 4,$$

y coincide con $g_k/2 = (97-89)/2 = 4$. El centro:

$$m_k = \frac{89+97}{2} = 93 = p_k + N_k = 89 + 4.$$

0.14. El equilibrio natural entre los primos

Figura 29: En la naturaleza, todo vibra en busca de equilibrio. Así como las aguas buscan su cauce y las olas repiten su ritmo, también los números primos guardan una armonía oculta: entre cada par consecutivo, una fuerza numérica invisible mantiene la tensión y el orden. El intervalo (p_k, p_{k+1}) no es un vacío, sino un puente silencioso donde la aritmética y la naturaleza comparten su equilibrio esencial..

En la naturaleza, todo vibra en busca de equilibrio. Los planetas giran en torno a su centro de masa, las ramas de un árbol se distribuyen para recibir la luz, y las olas del mar rompen siguiendo ritmos invisibles. Nada está completamente quieto ni perfectamente ordenado: la armonía surge de la tensión entre opuestos.

Del mismo modo, en la aritmética de los primos existe una tensión silenciosa. Entre dos números primos consecutivos no hay vacío, sino una **fuerza numérica** que mantiene un equilibrio oculto. Cada intervalo (p_k, p_{k+1}) parece un espacio muerto en la recta de los enteros, pero en realidad encierra un punto de estabilidad: un centro invisible que equilibra la distancia entre ambos primos.

Ese punto medio no es un número cualquiera: es el *corazón aritmético del intervalo*, el lugar donde el orden y la simetría se encuentran, como si la naturaleza misma respirara entre dos cimas numéricas. Allí, en mitad del espacio compuesto, el universo de los números parece recuperar el aliento, igual que el aire se calma en el valle entre dos montañas.

Proposición 0.50 (Identidad fundamental)**.** *Sea* $g_k = p_{k+1} - p_k$ *la* brecha prima *entre* p_k *y* p_{k+1}*. Para* $k \geq 2$*,*

$$N_k \;=\; \frac{p_{k+1} - p_k}{2} \;=\; \frac{g_k}{2}. \tag{0.35}$$

Ejemplo (Identidad fundamental). Toma $(p_k, p_{k+1}) = (47, 53)$. La brecha es

$$g_k = 53 - 47 = 6,$$

por lo que la identidad da

$$N_k = \frac{g_k}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Verificación con la media: $\widetilde{S}_k = \frac{47+53}{2} = 50 \equiv 3 \pmod{47}$.

Demostración. Por definición, $\widetilde{S}_k = \dfrac{S_k}{L_k} = \dfrac{p_k + p_{k+1}}{2} = p_k + \dfrac{g_k}{2}$. Luego $\widetilde{S}_k \equiv \dfrac{g_k}{2} \pmod{p_k}$ y como $p_k \geq 3$ (para $k \geq 2$) implica p_k impar y, por tanto, g_k es par, el menor residuo positivo es exactamente $g_k/2$. ■

Corolario 0.51 (Paridad y rango)**.** *Para* $k \geq 2$*,* $N_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *y* $1 \leq N_k < \frac{p_k}{2}$*.*

Ejemplo (Paridad y rango). Con $(p_k, p_{k+1}) = (59, 61)$ se tiene

$$g_k = 61 - 59 = 2 \quad \Rightarrow \quad N_k = \frac{2}{2} = 1.$$

Se cumple la paridad (ambos primos impares $\Rightarrow$ g_k par) y el rango:

$$1 = N_k < \frac{p_k}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5.$$

Demostración. Consecutivos p_k, p_{k+1} (ambos impares) dan g_k par; así $N_k = g_k/2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Por el postulado de Bertrand, $p_{k+1} < 2p_k$, de donde $g_k < p_k$ y $N_k < \frac{p_k}{2}$. ■

Proposición 0.52 (Tamaño del bloque y centro)**.** *El tamaño de* B_k *es* $L_k = |B_k| = g_k - 1 = 2N_k - 1$ *y su* centro *es*

$$m_k \;=\; \frac{p_k + p_{k+1}}{2} \;=\; p_k + N_k. \tag{0.36}$$

que es entero y coincide con la media aritmética de los compuestos del intervalo.

Ejemplo (Tamaño del bloque y centro). Para $(p_k, p_{k+1}) = (31, 37)$:

$$g_k = 37 - 31 = 6, \qquad N_k = \frac{6}{2} = 3.$$

Por tanto,

$$L_k = |B_k| = g_k - 1 = 6 - 1 = 5 = 2N_k - 1, \qquad B_k = \{32, 33, 34, 35, 36\}.$$

El centro (media de los compuestos) es

$$m_k = \frac{31 + 37}{2} = 34 = p_k + N_k = 31 + 3.$$

Demostración. L_k es el número de enteros estrictamente entre p_k y p_{k+1}: $g_k - 1$. Usando la proposición anterior, $g_k - 1 = 2N_k - 1$. La expresión de m_k es inmediata de la media $\widetilde{S}_k$. ■

0.15. Ejercicio

Ejercicio 0.84. Sea el intervalo primal $(p_k, p_{k+1}) = (7, 11)$. (a) Calcula la brecha g_k, la longitud L_k y el núcleo N_k. (b) Verifica que $m_k = \frac{p_k + p_{k+1}}{2} = p_k + N_k$. (c) Escribe explícitamente el bloque núcleo B_k y comprueba que $|B_k| = 2N_k - 1$.

Ejercicio 0.85. Considera $(p_k, p_{k+1}) = (47, 53)$. (a) Determina $g_k, L_k, S_k, \widetilde{S}_k$ y N_k. (b) Verifica la identidad fundamental $N_k = g_k/2$. (c) Interpreta geométricamente m_k como el centro simétrico del bloque B_k.

Ejercicio 0.86. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (89, 97)$. (a) Calcula N_k y m_k. (b) Escribe B_k y confirma que la suma $S_k = (2N_k - 1)(p_k + N_k)$. (c) Explica por qué $\widetilde{S}_k = \frac{p_k + p_{k+1}}{2}$ coincide con el centro aritmético del bloque.

Ejercicio 0.87. (Identidad del núcleo). Prueba que para todo $k \geq 2$, si $g_k = p_{k+1} - p_k$ entonces

$$N_k \equiv \widetilde{S}_k \pmod{p_k} \quad \text{y} \quad N_k = \frac{g_k}{2}.$$

Estructura la demostración utilizando $\widetilde{S}_k = \frac{p_k + p_{k+1}}{2} = p_k + \frac{g_k}{2}$.

Ejercicio 0.88. (Paridad y rango). Demuestra que para $k \geq 2$: (a) g_k es par y $N_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. (b) $L_k = 2N_k - 1$ es impar. (c) Usando el postulado de Bertrand, justifica que $N_k < \frac{p_k}{2}$.

Ejercicio 0.89. (Bloques núcleo pequeños). Para los intervalos $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$: (a) Calcula N_k y B_k en cada caso. (b) Compara sus centros m_k y discute por qué estos bloques representan núcleos "mínimos" dentro de D.

Ejercicio 0.90. (Ejemplo con brecha 6). Sea $(p_k, p_{k+1}) = (23, 29)$. (a) Determina N_k y B_k. (b) Verifica $L_k = 2N_k - 1$ y $m_k = p_k + N_k$. (c) Explica la relación "$N_k = 3 \iff$ brecha 6 (pares sexy)".

Ejercicio 0.91. (Clasificación por N_k). Prueba que

$$N_k = 1 \iff g_k = 2, \quad N_k = 2 \iff g_k = 4, \quad N_k = 3 \iff g_k = 6.$$

Discute cómo esta correspondencia induce clases de bloques núcleo dentro de D.

Ejercicio 0.92. (Tamaño del bloque y centro). Demuestra que

$$|B_k| = L_k = 2N_k - 1 \quad \text{y} \quad m_k = \frac{p_k + p_{k+1}}{2} = p_k + N_k \in \mathbb{Z}.$$

Interpreta m_k como el "punto de equilibrio" del bloque.

Ejercicio 0.93. (Suma telescópica de núcleos). Sea $m < n$. Prueba que

$$\sum_{k=m}^{n} N_k = \frac{1}{2} \sum_{k=m}^{n} (p_{k+1} - p_k) = \frac{p_{n+1} - p_m}{2}.$$

Comenta la interpretación aritmética de esta identidad para los elementos de D.

Ejercicio 0.94. (Comparación local de núcleos). Elige tres intervalos consecutivos $(p_k, p_{k+1}), (p_{k+1}, p_{k+2})$ (a) Calcula N_k, N_{k+1}, N_{k+2}. (b) Decide si aparece un patrón "valle–cresta–valle" en los valores de N. (c) Interpreta la no monotonicidad de $(N_k)_k$ dentro de D.

Ejercicio 0.95. (Núcleo normalizado). Define $\widehat{N}_k := \frac{N_k}{p_k}$. (a) Calcula $\widehat{N}_k$ para cinco intervalos consecutivos. (b) Compara su variación relativa con la variación absoluta de N_k. (c) Discute ventajas y límites de esta normalización para comparar bloques de distinto "tamaño base".

Ejercicio 0.96. (Índice de simetría). Sea $\Delta_k := \max B_k - m_k = m_k - \min B_k$. (a) Muestra que $\Delta_k = N_k - 1$. (b) Concluye que B_k es simétrico respecto de m_k. (c) Explica esta simetría en términos de progresiones aritméticas.

Ejercicio 0.97. (Construcción de B_k a partir de N_k). Dado p_k y N_k, reconstruye p_{k+1} y B_k: (a) Prueba que $p_{k+1} = p_k + 2N_k$. (b) Escribe $B_k = \{p_k + 1, \ldots, p_k + 2N_k - 1\}$. (c) Verifica que $S_k = (2N_k - 1)(p_k + N_k)$.

Ejercicio 0.98. (Comparación de bloques con igual N). Toma dos intervalos diferentes con el mismo $N_k = m$. (a) Escribe sus B_k y centros m_k. (b) Compara S_k y discute cómo influyen p_k y p_{k+1} en el "tamaño absoluto" del bloque manteniendo fija su estructura $2m - 1$.

Ejercicio 0.99. (Heurística del crecimiento). Usando que la brecha media alrededor de x es $\sim \log x$, argumenta heurísticamente que

$$\mathbb{E}[N_k] \asymp \tfrac{1}{2} \log p_k.$$

Discute por qué, pese a este crecimiento promedio lento, se esperan fuertes fluctuaciones locales en N_k.

Ejercicio 0.100. (Medida de "energía" del bloque). Define $\mathcal{E}_k := S_k/(2N_k - 1) = p_k + N_k$. (a) Interpreta $\mathcal{E}_k$ como valor medio del bloque. (b) Compara $\mathcal{E}_k$ para tres intervalos con N_k iguales pero p_k distintos. (c) Explica el papel de p_k como "nivel" sobre el que descansa la energía del bloque.

Ejercicio 0.101. (Operaciones en D). Sea $D = \{B_k : k \geq 2\}$. (a) Considera la aplicación $\Phi : B_k \mapsto N_k$. Describe su imagen y fibras. (b) Para $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, caracteriza $\Phi^{-1}(m)$. (c) Discute la posibilidad de definir una "métrica" natural en D basada en $|N_k - N_j|$.

Ejercicio 0.102. (Orden parcial por inclusión). Para $B_i, B_j \in D$, considera la relación $B_i \preceq B_j$ si $2N_i - 1 \leq 2N_j - 1$ y $p_i \leq p_j$. (a) Estudia si $\preceq$ define un preorden. (b) Discute cuándo se obtiene un orden parcial. (c) Interpreta la estructura resultante para comparar "tamaños" y "niveles" de bloques.

Ejercicio 0.103. (Núcleo y clases residuales). Prueba que

$$\widetilde{S}_k \equiv N_k \pmod{p_k} \quad \text{y} \quad \widetilde{S}_k \equiv -N_k \pmod{p_{k+1}}.$$

Interpreta estas congruencias como un "anclaje" doble del centro en los bordes del intervalo.

Ejercicio 0.104. (Dependencia de N_k respecto a p_k). Elige una ventana de cinco intervalos consecutivos. (a) Calcula N_k y grafica (conceptualmente) N_k en función de p_k. (b) Discute si observas tendencia creciente débil y saltos irregulares. (c) Conecta con la no monoticidad de las brechas primas.

Ejercicio 0.105. (Invariantes básicos del bloque). Para cada B_k, define los invariantes

$$I_1 := |B_k| = 2N_k - 1, \quad I_2 := m_k, \quad I_3 := S_k.$$

(a) Muestra que (I_1, I_2) determinan B_k unívocamente. (b) Explica cómo recuperar N_k y p_{k+1} a partir de ellos.

Ejercicio 0.106. (Comparativa de núcleos contiguos). Para tres núcleos consecutivos N_{k-1}, N_k, N_{k+1}: (a) Define $J_k := |N_{k+1} - N_k|$. (b) Interpreta J_k como "salto del núcleo"

análogo a los saltos de longitud en Cap. 2. (c) Estudia empíricamente un tramo y localiza máximos de J_k.

Ejercicio 0.107. (Núcleo relativo). Define $\widehat{N}_k := \frac{2N_k}{p_{k+1}} = \frac{g_k}{p_{k+1}}$. (a) Calcula $\widehat{N}_k$ en cinco intervalos y ordénalos. (b) Compara este ranking con el de N_k. (c) Discute qué índice detecta mejor "núcleos dominantes" a gran escala.

Ejercicio 0.108. (Descomposición par–impar del bloque). Sea $B_k = A_{\text{par}} \cup A_{\text{impar}}$ según la paridad. (a) Expresa S_k como suma sobre A_{par} y A_{impar}. (b) Obtén fórmulas cerradas para cada contribución. (c) Interpreta cómo la posición del centro m_k separa (o no) masas pares e impares.

Ejercicio 0.109. (Compatibilidad con Cap. 2). Muestra que $L_k = 2N_k - 1$ y $S_k = (2N_k - 1)(p_k + N_k)$ reexpresan las cantidades de longitud y suma del Cap. 2 en términos del núcleo. Discute ventajas de trabajar con N_k como parámetro primario.

Ejercicio 0.110. (Construcción inversa). Dado p_k y un entero $N \geq 1$, construye (si existe) un primo p_{k+1} con $p_{k+1} - p_k = 2N$. (a) Formula la condición necesaria para la primalidad de p_{k+1}. (b) Comenta obstáculos y limitaciones de este procedimiento para poblar D con una clase fija de núcleos.

Ejercicio 0.111. (Bloques isonucleares). Llama "isonucleares" a los B_i, B_j con $N_i = N_j$. (a) Da ejemplos explícitos de pares isonucleares. (b) Compara S_i, S_j y m_i, m_j. (c) Discute qué significa "misma estructura interna" con diferentes escalas aritméticas.

Ejercicio 0.112. (Estadística local de N). En una ventana de 10 intervalos, registra los N_k. (a) Calcula media, mediana y rango. (b) Cuenta cuántas veces aparece cada valor pequeño de N (1,2,3,4). (c) Interpreta el perfil resultante como "firma local" del conjunto D en esa zona.

Ejercicio 0.113. (Núcleo y "altura" del valle). Define la "altura" $H_k := \max B_k - \min B_k = 2N_k - 2$. (a) Demuestra la fórmula. (b) Explica por qué H_k mide la extensión efectiva del valle compuesto. (c) Compara H_k en dos bloques con N distintos.

Ejercicio 0.114. (Comparativa con centros sucesivos). Sea $C_k := m_k$ y $C_{k+1} := m_{k+1}$. (a) Expresa $C_{k+1} - C_k$ en función de p_k, p_{k+1}, p_{k+2}. (b) Interpreta el salto de centros como una medida de irregularidad de la secuencia de núcleos. (c) Observa empíricamente este salto en un tramo concreto.

Ejercicio 0.115. (Resumen conceptual). Redacta una síntesis que conecte: núcleo N_k, centro m_k, tamaño $|B_k|$, suma S_k, y la estructura global del conjunto D. Incluye una discusión sobre por qué D captura el "corazón" de cada intervalo primal y cómo complementa el estudio tradicional de los primos.

Capítulo 4. Mapa de Discontinuidades de Números Primos

Introducción

Imaginemos el universo de los números como un vasto desierto. A primera vista, parece infinito, silencioso y uniforme. Sin embargo, quien lo recorre con atención descubre que este paisaje no es plano: hay dunas que se elevan repentinamente, zonas tranquilas donde casi nada cambia y largos tramos donde el terreno se vuelve impredecible.

En este desierto aritmético, los **números primos** son como *oasis*: puntos especiales, escasos pero esenciales. Entre un oasis y el siguiente se extienden regiones de arena (números compuestos), a veces muy cortas, otras veces sorprendentemente largas. Estas regiones son los **intervalos primales**, y su longitud determina la forma del paisaje numérico.

Cada intervalo es como una duna: puede ser baja o abrupta, suave u ondulante. La sucesión de estas dunas forma un *relieve aritmético* repleto de altibajos. Y así como un geógrafo estudia la distancia entre dunas para comprender el viento que las formó, nosotros estudiamos las **discontinuidades** entre primos para entender la dinámica interna de la aritmética.

Este capítulo construye el **Mapa de Discontinuidades de Números Primos**: una representación conceptual que nos permite visualizar cómo varían las brechas entre primos. En lugar de observar solo los puntos donde aparecen, analizamos los espacios que los separan, revelando un territorio lleno de patrones, repeticiones y sorpresas.

Al recorrer este mapa, descubrimos que ciertas formaciones aparecen una y otra vez como los intervalos donde hay exactamente tres números compuestos de la misma manera en que ciertas dunas reaparecen cuando el viento sopla con un ritmo particular.

Estas repeticiones no son coincidencias: son huellas de una estructura modular más profunda.

En este capítulo:

- Definiremos formalmente la distancia entre primos y la cantidad de enteros intermedios.
- Identificaremos intervalos especiales (por ejemplo, aquellos con tres compuestos).
- Construiremos tablas que muestran cómo se repiten estas formaciones en el paisaje numérico.
- Analizaremos las distancias entre dichos intervalos usando congruencias y ruedas modulares.
- Revelaremos que las discontinuidades siguen ciclos aritméticos similares a rutas en un mapa.

Así como un mapa del desierto revela dunas, valles y rutas ocultas, el **Mapa de Discontinuidades** nos permite observar el relieve oculto de los primos: un paisaje donde el silencio entre los números habla, y donde cada intervalo contiene una pista sobre la estructura profunda del universo aritmético.

Definición . Cantidad de enteros intermedios.

Sea p y q primos consecutivos. La cantidad de enteros entre ellos es:

$$|(p,q)| = q - p - 1 \tag{0.37}$$

Si $q - p = 4$, entonces hay exactamente 3 números intermedios.

En los tres casos:

$$11 - 7 = 4, \quad 17 - 13 = 4, \quad 23 - 19 = 4 \;\Rightarrow\; |(p,q)| = 3$$

Distancias observadas entre términos relevantes

La sucesión de *distancias* entre inicios consecutivos p (que efectivamente forman un par $(p, p+4)$ con ambos primos) comienza:

$$\Delta p: \; 6, 6, 18, 6, 24, 12, 18, 6, 6, 18, 36, 30, 30, 6, \ldots$$

Cuadro 4: Intervalos de primos con tres números compuestos intermedios

Intervalo	Primos	Observación
(7,11)	7, 11	Tres números entre los primos
(13,17)	13, 17	Tres números entre los primos
(19,23)	19, 23	Tres números entre los primos
(37,41)	37, 41	Tres números entre los primos
(43,47)	43, 47	Tres números entre los primos
(67,71)	67, 71	Tres números entre los primos
(79,83)	79, 83	Tres números entre los primos
(97,101)	97, 101	Tres números entre los primos
(103,107)	103, 107	Tres números entre los primos
(109,113)	109, 113	Tres números entre los primos
(127,131)	127, 131	Tres números entre los primos
(163,167)	163, 167	Tres números entre los primos
(193,197)	193, 197	Tres números entre los primos
(223,227)	223, 227	Tres números entre los primos
(229,233)	229, 233	Tres números entre los primos
(257,263)	257, 263	Tres números entre los primos
(269,271)	269, 271	Tres números entre los primos
(307,311)	307, 311	Tres números entre los primos
(311,313)	311, 313	Tres números entre los primos
(347,353)	347, 353	Tres números entre los primos

y entre los fines $q = p + 4$:

$$\Delta q: \ 6, 6, 18, 6, 24, 12, 18, 6, 6, 18, 36, 30, 30, 6, \ldots$$

Es decir, las distancias en q coinciden con las de p:

$$q_{j+1} - q_j = (p_{j+1} + 4) - (p_j + 4) = p_{j+1} - p_j.$$

0.16. Análisis profundo de distancias para los pares con $q - p = 4$

Depuración de la lista y datos base

De la tabla dada, nos enfocamos *únicamente* en los intervalos (p, q) con $q - p = 4$ (es decir, exactamente tres enteros compuestos intermedios). Esto produce la sucesión de

inicios

$$p:\ 7,\ 13,\ 19,\ 37,\ 43,\ 67,\ 79,\ 97,\ 103,\ 109,\ 127,\ 163,\ 193,\ 223,\ 229,\ 307,\ \ldots$$

y la correspondiente sucesión de *fines*

$$q = p + 4:\ 11,\ 17,\ 23,\ 41,\ 47,\ 71,\ 83,\ 101,\ 107,\ 113,\ 131,\ 167,\ 197,\ 227,\ 233,\ 311,\ \ldots$$

0.16.1. Distancias observadas

Las distancias entre inicios consecutivos son:

$$\Delta p:\ 6,\ 6,\ 18,\ 6,\ 24,\ 12,\ 18,\ 6,\ 6,\ 18,\ 36,\ 30,\ 30,\ 6,\ 78,\ \ldots$$

y coinciden con las distancias entre los fines:

$$\Delta q:\ 6,\ 6,\ 18,\ 6,\ 24,\ 12,\ 18,\ 6,\ 6,\ 18,\ 36,\ 30,\ 30,\ 6,\ 78,\ \ldots$$

pues $q_{j+1} - q_j = (p_{j+1} + 4) - (p_j + 4) = p_{j+1} - p_j$.

Rueda modular $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y patrón generador

Para $p > 3$, un primo es $\equiv 1$ o $5 \pmod 6$. Si $(p, p+4)$ son ambos primos ($p > 5$), entonces necesariamente $p \equiv 1 \pmod 6$ (si $p \equiv 5 \pmod 6$, entonces $p + 4 \equiv 3 \pmod 6$ sería múltiplo de 3) y, al filtrar múltiplos de 5, trabajamos módulo 30.

Lema 0.53 (Clases residuales admisibles)**.** *Si $p > 5$ y $(p, p+4)$ son ambos primos, entonces*

$$p \equiv 7,\ 13,\ 19 \pmod{30} \qquad y \qquad p + 4 \equiv 11,\ 17,\ 23 \pmod{30}.$$

Demostración. Las clases coprimas con 30 son $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Los primos > 3 satisfacen $p \equiv 1, 5 \pmod 6$; para que $p + 4$ no sea múltiplo de 3, debe $p \equiv 1 \pmod 6$. Entre las clases coprimas congruentes a $1 \pmod 6$ quedan $1, 7, 13, 19 \pmod{30}$. Si $p \equiv 1 \pmod{30}$, entonces $p + 4 \equiv 5 \pmod{30}$ es múltiplo de 5; se descarta. Permanecen $p \equiv 7, 13, 19 \pmod{30}$, que inducen $p + 4 \equiv 11, 17, 23 \pmod{30}$. ■

Observación 0.54 (Ciclo determinista entre *candidatos*). Ordenando las clases admisibles $7 \to 13 \to 19 \to (7 + 30) \to (13 + 30) \to \cdots$, las diferencias entre *candidatos* (sin exigir

primalidad) describen el ciclo periódico

$$\boxed{6,\ 6,\ 18} \quad (\text{mód } 30).$$

0.16.2. El ritmo de la naturaleza y la geometría de los primos

En la naturaleza, nada ocurre sin ritmo. Las olas rompen con una cadencia, las estaciones se repiten, las hojas se abren siguiendo proporciones invisibles. Aun en lo que parece aleatorio el vuelo de un pájaro, la forma de una nube, el cauce de un río hay una estructura, una secuencia interna que regula el movimiento y da coherencia al cambio.

De forma análoga, en la aritmética de los primos, también late un ritmo profundo. Las diferencias entre números primos consecutivos no son un caos sin ley, sino una danza discreta, donde ciertos pasos —como los múltiplos de seis— se repiten con la precisión de un compás oculto.

Cada par $(p_j, p_j + 4)$ puede verse como dos notas que vibran al unísono dentro del gran pentagrama de los enteros. Las distancias entre ellos, al ser múltiplos de un mismo ciclo base $(6, 6, 18)$, evocan el pulso de un mecanismo natural: una rueda modular que gira sin cesar, dejando huellas rítmicas en la recta numérica.

Así como la naturaleza combina repetición y variación —el mismo amanecer nunca idéntico, la misma ola jamás igual—, las secuencias de distancias entre primos revelan una armonía oculta en su aparente irregularidad. El teorema que sigue no es solo una afirmación algebraica: es una observación sobre la forma en que la estructura emerge del flujo, como un patrón que la naturaleza habría podido escribir en los números.

0.16.3. Teorema estructural de las distancias reales

Sea $\{C_k\}$ la sucesión (creciente) de *candidatos* congruentes a $7, 13, 19 \pmod{30}$ obtenida concatenando el ciclo $6, 6, 18$. Defínase $\{p_j\}$ como la sucesión de inicios que efectivamente generan un par primo $(p_j, p_j + 4)$.

Teorema 0.55 (Distancias como sumas de bloques del ciclo)**.** *Con la notación anterior:*

1. $\{p_j\}$ *es un subconjunto ordenado de* $\{C_k\}$.

2. *Para todo* j*, la distancia* $p_{j+1} - p_j$ *es una* suma de bloques consecutivos *del ciclo* $6, 6, 18$. *En particular,* $p_{j+1} - p_j$ *es siempre múltiplo de* 6 *y la distancia mínima posible es* 6.

Demostración. (1) Por el Teorema 0.53, todo p_j debe caer en una de las clases $7, 13, 19 \pmod{30}$, que son precisamente las que recorre $\{C_k\}$; por tanto $\{p_j\} \subseteq \{C_k\}$.

(2) Para pasar de p_j a p_{j+1} se avanza en $\{C_k\}$ hasta hallar el siguiente $C_{k'}$ tal que (i) $C_{k'}$ es primo y (ii) $C_{k'} + 4$ es primo. Cuando un candidato falla (por no ser primo él o su $+4$), se "salta" al siguiente del ciclo; así, $p_{j+1} - p_j$ es la suma de $r \geq 1$ incrementos consecutivos tomados de $\{6, 6, 18, 6, 6, 18, \dots\}$. Toda tal suma es múltiplo de 6; el mínimo bloque es 6. ■

0.16.4. Lectura de los datos empíricos a la luz del teorema

Las distancias observadas

$$6,\ 6,\ 18,\ 6,\ 24,\ 12,\ 18,\ 6,\ 6,\ 18,\ 36,\ 30,\ 30,\ 6,\ 78, \dots$$

se obtienen como sumas de bloques del ciclo base:

$$24 = 6 + 18, \quad 12 = 6 + 6, \quad 36 = 6 + 6 + 18,$$
$$30 = 6 + 24 = 6 + (6 + 18), \quad 78 = 6 + 6 + 18 + 6 + 24, \text{ etc.}$$

La *no superación de* 30 en los primeros términos se explica por la **alta densidad de candidatos válidos**: al inicio se descartan pocos y, por tanto, rara vez se acumulan más de dos o tres bloques. Más adelante, al disminuir la densidad de primos (y de pares $(p, p + 4)$), se encadenan más saltos del ciclo y aparecen distancias mayores (p. ej. 36, 78).

Corolarios inmediatos

Corolario 0.56 (Paridad y mínimo)**.** *Toda distancia entre inicios (y entre fines) de pares con $q - p = 4$ es múltiplo de 6 y la mínima es 6.*

Corolario 0.57 (Coincidencia de patrones en p y q)**.** *Si $q_j = p_j + 4$, entonces $q_{j+1} - q_j = p_{j+1} - p_j$; por tanto, Δp y Δq comparten exactamente el mismo patrón de saltos.*

Rueda modular y candidatos

Para $p > 5$, si $(p, p + 4)$ son primos, entonces (trabajando módulo 30):

Lema 0.58 (Clases residuales admisibles)**.** *Si $p > 5$ y $(p, p + 4)$ son ambos primos, entonces*

$$p \equiv 7,\ 13,\ 19 \pmod{30} \qquad y \qquad p + 4 \equiv 11,\ 17,\ 23 \pmod{30}.$$

Demostración. Los primos > 3 son $\equiv 1$ o $5 \pmod 6$. Si $p \equiv 5 \pmod 6$ entonces $p+4 \equiv 3 \pmod 6$ (múltiplo de 3), imposible. Luego $p \equiv 1 \pmod 6$. Filtrando además los múltiplos de 5 (módulo 30), resultan las clases coprimas congruentes a $1 \pmod 6$: $1, 7, 13, 19 \pmod{30}$, pero $1 \mapsto p+4 \equiv 5 \pmod{30}$ (múltiplo de 5). Quedan $p \equiv 7, 13, 19 \pmod{30}$ y entonces $p+4 \equiv 11, 17, 23 \pmod{30}$. ■

0.16.5. Ciclo de incrementos entre *candidatos*

Ordenando las clases admisibles para p y avanzando una vuelta ($+30$) cuando toca, se obtiene el *ciclo determinista* de diferencias entre *candidatos*:

$$\boxed{6,\ 6,\ 18} \qquad \text{(periódico)}$$

Más precisamente, si definimos $C_1 = 7$ y, para $k \geq 1$,

$$C_{k+1} = C_k + s_k, \qquad s_k \in \{6, 6, 18\} \text{ cíclico},$$

entonces $\{C_k\}$ recorre exactamente las clases $7, 13, 19 \pmod{30}$ en orden, produciendo

$$7,\ 13,\ 19,\ 37,\ 43,\ 49,\ 67,\ 73,\ 79,\ 97,\ 103,\ 109,\ 127,\ 133,\ 139,\ 157,\ 163,\ \ldots$$

y análogamente $D_k = C_k + 4$ recorre $11, 17, 23 \pmod{30}$:

$$11,\ 17,\ 23,\ 41,\ 47,\ 53,\ 71,\ 77,\ 83,\ 101,\ 107,\ 113,\ 131,\ 137,\ 143,\ 161,\ 167,\ \ldots$$

Nota: C_k y D_k son *candidatos* (no todos son primos).

Teorema 0.59 (Distancia mínima y estructura de saltos)**.** *Sea $\{p_j\}$ la sucesión estrictamente creciente de todos los enteros $p > 5$ tales que $(p, p+4)$ son ambos primos. Entonces:*

1. *$\{p_j\}$ es un* subconjunto *ordenado de la sucesión de candidatos $\{C_k\}$.*
2. *Toda diferencia $p_{j+1} - p_j$ es una* suma de bloques consecutivos *del ciclo $6, 6, 18$. En particular, $p_{j+1} - p_j$ es* ***siempre múltiplo de*** *6 y la* ***distancia mínima posible es*** *6.*

Demostración. (1) Por el **??** las únicas clases posibles para p son $7, 13, 19 \pmod{30}$, que precisamente recorre $\{C_k\}$.

(2) Pasar de p_j a p_{j+1} equivale a avanzar desde algún C_k hasta el siguiente $C_{k'}$ que (i) sea primo y (ii) además satisfaga que $C_{k'} + 4$ es primo. Saltar candidatos compuestos o que fallan en $p+4$ se traduce en sumar uno o varios términos consecutivos del ciclo

6, 6, 18. La suma de números del conjunto $\{6, 6, 18\}$ es siempre múltiplo de 6; el mínimo bloque es un solo 6. ■

0.16.6. Aplicación directa a las dos sucesiones que nos interesan

Si seleccionamos de $\{C_k\}$ sólo aquellos p para los que $(p, p+4)$ son primos, recuperamos los *inicios* observados:

$$7,\ 13,\ 19,\ 37,\ 43,\ 67,\ 79,\ 97,\ 103,\ 109,\ 127,\ 163,\ 193,\ 223,\ 229,\ 307,\ \ldots$$

y, sumando 4, los *fines* correspondientes:

$$11,\ 17,\ 23,\ 41,\ 47,\ 71,\ 83,\ 101,\ 107,\ 113,\ 131,\ 167,\ 197,\ 227,\ 233,\ 311,\ \ldots$$

De aquí se obtienen exactamente las distancias

$$\Delta p = \Delta q:\ 6,\ 6,\ 18,\ 6,\ 24,\ 12,\ 18,\ 6,\ 6,\ 18,\ 36,\ 30,\ 30,\ 6,\ 78,\ \ldots$$

que son sumas de bloques del ciclo 6, 6, 18 (por ejemplo $24 = 6 + 18$, $36 = 6 + 6 + 18$, $78 = 6 + 6 + 18 + 6 + 24$, etc.).

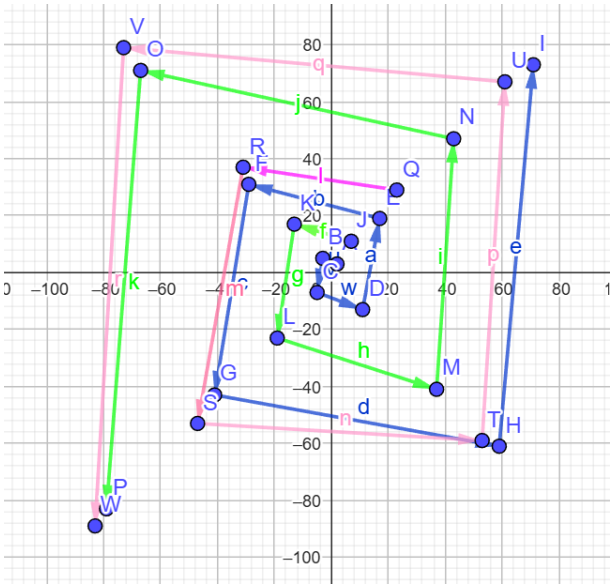


Figura 30: Mapa de números primos en intervalo descontinuidad.

Para comprender el comportamiento global de las brechas entre números primos, es necesario observar no sólo ejemplos aislados, sino la sucesión completa de intervalos entre primos consecutivos.

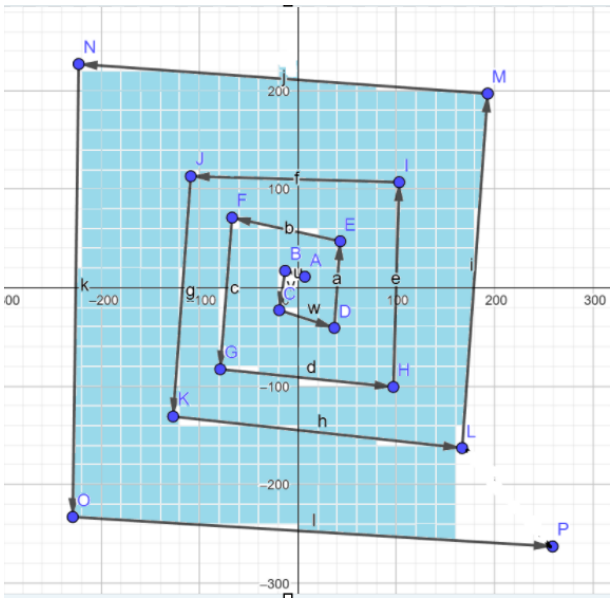


Figura 31: Mapa de números primos en el intervalo 3.

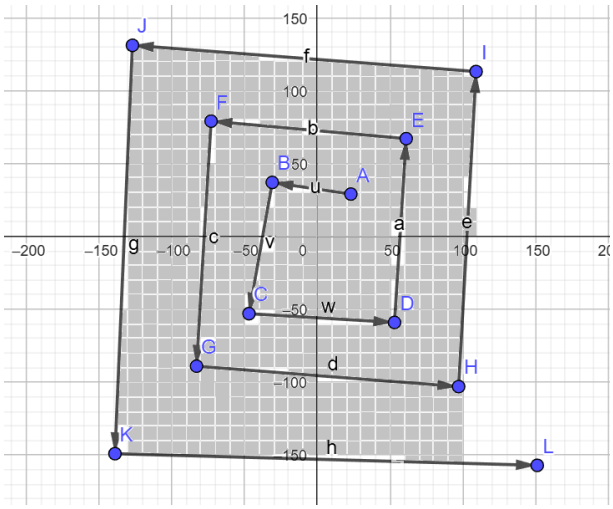


Figura 32: Mapa de números primos en el intervalo 5.

Con este propósito, en el **Anexo X** se presenta una tabla exhaustiva que contiene, para cada par de primos consecutivos (p_k, p_{k+1}), la cantidad exacta de números enteros que se encuentran entre ellos. Esta tabla fue construida mediante la aplicación de la Criba de Eratóstenes y constituye el soporte empírico fundamental para el estudio de las discontinuidades primales.

La información del anexo revela con claridad que las brechas entre primos no siguen un patrón suave ni creciente de manera uniforme, sino que oscilan constantemente entre intervalos pequeños y saltos abruptos. Estos cambios repentinos en la longitud de los intervalos son precisamente las **discontinuidades** que analizamos en este capítulo.

A partir de dicha tabla, podemos:

- Detectar los intervalos más frecuentes (por ejemplo, brechas de 1, 3, 5 o 7 enteros).
- Identificar saltos notables donde aparecen brechas largas (como 13, 17, 19, 21, 25 o más).
- Comparar la variabilidad entre intervalos consecutivos, construyendo así un verdadero **mapa de discontinuidades**.
- Analizar la aparición de estructuras recurrentes que dan origen a los **bloques prímales** y al **conjunto** D.

En síntesis, el **Mapa de Discontinuidades** que desarrollamos en este capítulo se apoya directamente en los datos del **Anexo X**. Dicho anexo no es un simple listado de valores, sino una representación numérica del relieve aritmético de los primos: allí se encuentran las "montañas" (brechas grandes), los "valles" (brechas pequeñas) y las transiciones que revelan la dinámica interna de la distribución primal.

0.17. Ejercicio

Ejercicio 0.116. Sea $p < q$ un par de primos consecutivos. Demuestra que la cantidad de enteros estrictamente intermedios es $|(p, q)| = q - p - 1$. Interpreta este conteo como la "altura efectiva" del valle compuesto entre p y q dentro del mapa de discontinuidades.

Ejercicio 0.117. Muestra que $|(p, q)| = 3$ si y solo si $q - p = 4$. Explica por qué este caso induce un patrón repetitivo especial en el mapa (bloques de tres compuestos) y por qué es "estable" bajo traslaciones de p a $p + 30$ dentro de la rueda $2 \cdot 3 \cdot 5$.

Ejercicio 0.118. Construye la lista de intervalos (p, q) con $q - p = 4$ para todos los primos $p \leq 200$. Escribe la sucesión de inicios $\{p_j\}$ y la sucesión de fines $\{q_j\}$ correspondientes. No incluyas soluciones; solo presenta la lista final como dato construido.

Ejercicio 0.119. Define la sucesión de distancias entre inicios consecutivos de intervalos con $q - p = 4$ por $\Delta p_j := p_{j+1} - p_j$. Registra los primeros 20 valores de Δp_j a partir de tu lista del ejercicio anterior y comenta la presencia o ausencia del patrón $6, 6, 18$ (sin justificar aún).

Ejercicio 0.120. Trabajando módulo 6, demuestra que, para $p > 3$, si $(p, p + 4)$ son ambos primos entonces $p \equiv 1 \pmod 6$. Concluye que todas las distancias entre inicios consecutivos de estos intervalos son múltiplos de 6.

Ejercicio 0.121. Rueda modular 30. Prueba que, para $p > 5$, si $(p, p+4)$ son primos entonces

$$p \equiv 7,\ 13,\ 19 \pmod{30}, \qquad p+4 \equiv 11,\ 17,\ 23 \pmod{30}.$$

Discute por qué las demás clases coprimas con 30 quedan excluidas por divisibilidad por 3 o 5.

Ejercicio 0.122. Ordenando las clases $7, 13, 19 \pmod{30}$ de forma creciente y luego avanzando una vuelta, deduce que la sucesión de *candidatos* para inicios p (sin imponer primalidad) presenta el ciclo determinista de incrementos $6, 6, 18$. Escribe los primeros 25 candidatos generados por este ciclo.

Ejercicio 0.123. Sea $\{C_k\}$ la sucesión creciente de candidatos del ejercicio anterior. Define $D_k := C_k + 4$. Explica por qué $\{D_k\}$ es la sucesión de *candidatos* a fines. Registra los primeros 25 términos de $\{D_k\}$ y compara sus incrementos con los de $\{C_k\}$.

Ejercicio 0.124. Sea $\{p_j\}$ la sucesión (creciente) de todos los p tales que $(p, p+4)$ son primos. Justifica que $\{p_j\}$ es un subconjunto ordenado de $\{C_k\}$ (candidatos). Enuncia sin demostrar que cada salto $p_{j+1} - p_j$ es suma de bloques consecutivos del ciclo $6, 6, 18$.

Ejercicio 0.125. A partir de una ventana de datos (por ejemplo, $p \leq 1000$), calcula empíricamente la distribución de los saltos Δp_j entre inicios de intervalos con $q - p = 4$ y clasifícalos según si son $6, 12, 18, 24, 30, 36$ o ≥ 42. Presenta solo el conteo (sin pruebas).

Ejercicio 0.126. Explica por qué, si $q_j = p_j + 4$, entonces $q_{j+1} - q_j = p_{j+1} - p_j$. Interpreta esta coincidencia como una "superposición" de capas en el mapa: la capa de inicios y la capa de fines comparten la misma geometría de saltos.

Ejercicio 0.127. Define el *mapa de discontinuidades* como la función escalón que, en cada intervalo (p_k, p_{k+1}), toma el valor $q - p - 1$. Diseña un procedimiento para graficar conceptualmente sus "crestas" (brechas grandes) y "valles" (brechas pequeñas) sobre un rango dado (por ejemplo, hasta 10^4).

Ejercicio 0.128. Generaliza el análisis a brecha $q - p = 6$. (a) Determina las clases residuales de p módulo 30 para las que $(p, p+6)$ puede ser par primo. (b) Determina un ciclo determinista de incrementos de *candidatos* análogo a $6, 6, 18$ en el caso $q - p = 4$.

Ejercicio 0.129. Para $q - p = 8$, repite el planteamiento del ejercicio anterior: clases residuales admisibles para $p \pmod{30}$ que permitan $(p, p+8)$ ambos primos, y ciclo determinista entre candidatos (sin imponer primalidad). Compara con los casos 4 y 6.

Ejercicio 0.130. Sea $A_g := \{p : p, p+g \text{ primos}\}$ para un g par fijo. Define la sucesión de distancias entre inicios $\Delta_g(p)$ análoga a Δp_j. Propón una conjetura sobre la estructura modular que genera los saltos de Δ_g (sin demostrar).

Ejercicio 0.131. Considera la tabla de intervalos con $q - p = 4$ dada en el capítulo. Construye una versión extendida con al menos 20 filas más, manteniendo el criterio $q - p = 4$. Señala en una columna adicional los residuos de p módulo 30 y verifica que sólo aparecen $7, 13, 19$.

Ejercicio 0.132. Para una ventana $[X, 2X]$ con X suficientemente grande (elige un valor concreto), propone un protocolo de muestreo para estimar la frecuencia relativa de apariciones de $q - p = 4$. Detalla las etapas: filtrado por rueda 30, test de primalidad de p y de $p + 4$, registro de saltos entre inicios.

Ejercicio 0.133. Define la "variación total local" del mapa en un tramo de M intervalos consecutivos como $\mathrm{TV} := \sum |(q_{k+1} - p_{k+1} - 1) - (q_k - p_k - 1)|$. Diseña un plan para comparar la variación total entre: (i) todos los intervalos, (ii) solo los con $q - p = 4$, (iii) solo los con $q - p \geq 10$.

Ejercicio 0.134. Muestra que, para $q - p = 4$, la distancia mínima entre inicios consecutivos es 6. Presenta tres ejemplos concretos diferentes donde se logra exactamente 6 (sin demostrar generalidad).

Ejercicio 0.135. Para $q - p = 4$, da ejemplos concretos (distintos a los anteriores) de distancias entre inicios iguales a 12, 18, 24 y 30, extraídos de tu lista empírica. Comenta brevemente cómo se interpretan como sumas de bloques del ciclo $6, 6, 18$.

Ejercicio 0.136. Construye un "perfil de mapa" que señale, a lo largo de la recta numérica hasta un límite N concreto, los puntos donde ocurre $q - p = 4$ y la altura $|(p, q)| = 3$. Indica las distancias horizontales entre marcas consecutivas y compáralas con tus valores de Δp_j.

Ejercicio 0.137. Introduce la noción de "bloque de repetición" como una racha de r apariciones de $q - p = 4$ separadas todas ellas por saltos ≤ 18. Propón un método para identificar estos bloques en tus datos y registra al menos tres bloques con sus longitudes r.

Ejercicio 0.138. Sea $\mathcal{C}_4$ el conjunto de candidatos $p \equiv 7, 13, 19 \pmod{30}$. Define la tasa de éxito local

$$\eta(X) := \frac{\#\{p \in \mathcal{C}_4 \cap [1, X] : \ p, p + 4 \text{ primos}\}}{\#(\mathcal{C}_4 \cap [1, X])}.$$

Diseña un experimento computacional (conceptual) para estimar $\eta(X)$ y registrar su tendencia en tres ventanas disjuntas.

Ejercicio 0.139. Considera la "capa de inicios" y la "capa de fines" del mapa para $q - p = 4$. Propón una visualización donde ambas capas estén superpuestas horizontalmente con un desplazamiento vertical fijo. Explica cómo leer coincidencias y divergencias si se extendiera el análisis a varias brechas (4, 6, 8).

Ejercicio 0.140. Generaliza el patrón $6, 6, 18$ a una rueda modular $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ para $q - p = 4$: describe el conjunto de clases residuales admisibles de p módulo 210 y explica cómo se construiría el ciclo determinista de diferencias entre candidatos en esa rueda mayor (sin calcularlo completamente).

Ejercicio 0.141. Define la función indicatriz $\chi_4(n) = 1$ si $(n, n+4)$ son primos y 0 en otro caso. Propón una convolución discreta simple que resalte "bandas" de alta densidad de χ_4 en un rango $[1, N]$, y explica cómo esta operación se interpreta como un suavizado del mapa.

Ejercicio 0.142. Para una brecha general $g = 2h$, define $\chi_g(n) = 1$ si $(n, n+g)$ son primos. Sugiere cómo adaptar la rueda modular apropiada (producto de primos pequeños) para filtrar candidatos de n y deducir un ciclo determinista de incrementos análogo a $6, 6, 18$ para $g = 4$.

Ejercicio 0.143. Compara el *mapa de discontinuidades* basado en $q - p - 1$ con el *mapa de núcleos* del Capítulo 3 basado en $N_k = (q - p)/2$. Explica cómo la condición $q - p = 4$ (tres compuestos) se traduce en $N_k = 2$ y en $|B_k| = 2N_k - 1 = 3$.

Ejercicio 0.144. Define el "ritmo local" como la razón $\rho := \frac{\#\{(p,q): q-p=4 \text{ en } [X,2X]\}}{\#\{(p,q) \text{ todos en } [X,2X]\}}$. Diseña una metodología para comparar ρ en tres ventanas disjuntas y comenta cómo se esperaría que cambie con X.

Ejercicio 0.145. Propón una métrica elemental entre dos mapas (por ejemplo, entre la capa $q - p = 4$ y la capa $q - p = 6$) basada en la distancia promedio entre sus posiciones marcadas hasta N. Describe cómo esta métrica podría revelar alineaciones o desfasajes entre capas.

Ejercicio 0.146. Formula una conjetura cualitativa sobre la aparición de "corredores" en el mapa: zonas donde varias brechas pequeñas (4, 6, 8) alternan con alta frecuencia en un tramo relativamente corto. Indica qué evidencias empíricas te gustaría recolectar para apoyar la conjetura.

Ejercicio 0.147. Redacta un resumen (solo conceptual) del método: (i) filtrar candidatos por rueda, (ii) identificar pares primales con brecha prescrita, (iii) medir distancias entre inicios y fines, (iv) comparar con el ciclo determinista de la rueda, (v) proyectar el resultado como un mapa de discontinuidades.

Ejercicio 0.148. (Proyecto final del capítulo) Diseña un "atlas" de discontinuidades para $g \in \{4, 6, 8, 10\}$ en un rango $[1, N]$ elegido por ti: tabla de clases residuales admisibles, listas de candidatos, ciclos deterministas, distancias observadas, superposición de capas y comentarios interpretativos. Presenta únicamente el plan estructurado del atlas .

Capítulo 5. Núcleo y Cascadas en Intervalos Primos

Introducción

En la naturaleza, el agua no avanza en línea recta: busca caminos, se bifurca, cae en desniveles, forma curvas inesperadas y, en ciertos puntos, se precipita en cascadas. Una cascada no es solo un salto de agua, sino el resultado de una estructura interna del terreno: un punto crítico, un desnivel central, un núcleo geológico que concentra la energía del río y la libera en un descenso dinámico.

De manera análoga, los intervalos entre números primos no son meros espacios vacíos. Cada intervalo posee una forma interna, una distribución de números compuestos y un punto de equilibrio aritmético: su **núcleo**. Este núcleo actúa como el centro de gravedad del intervalo, el punto donde se concentra la información modular del bloque, y desde el cual se puede generar movimiento dinámico.

Al igual que una cascada nace de un desnivel oculto en la montaña, las *cascadas aritméticas* nacen del núcleo de un intervalo primal. Cuando interpretamos este núcleo dentro de una transformación iterativa como la de Collatz, se desencadena una sucesión de valores llamada **cascada**: una trayectoria que puede crecer, bifurcarse, repetirse o detenerse, igual que un río que cae por niveles diversos.

Este hecho revela una idea profunda: **los intervalos primos no solo tienen estructura estática (longitud, suma, composición), sino también comportamiento dinámico.** Cada intervalo es como una cuenca hidrográfica: contiene energía, y su núcleo es la compuerta que puede liberar esa energía en forma de cascadas numéricas.

En capítulos anteriores se definieron los núcleos N_k como valores centrales dentro de los intervalos (p_k, p_{k+1}). En este capítulo avanzamos un paso más: estudiamos cómo ese núcleo genera *movimiento* cuando se le aplica la noción de *predecesor* en la dinámica de Collatz. Así, cada intervalo primal puede producir una cascada aritmética, finita o

infinita, que refleja patrones ocultos en la distribución de los primos.

En particular, mostraremos que ciertos intervalos —como aquellos con $q = p + 4$— producen núcleos invariantes ($N_k = 2$) y, por lo tanto, cascadas muy simples. En otros intervalos, el núcleo genera trayectorias más largas, revelando una complejidad estructural similar a las cascadas naturales que se ramifican o desaparecen según las condiciones del terreno.

Este capítulo explora:

- Cómo el núcleo actúa como el origen de una cascada aritmética.
- Cómo se definen y calculan los *predecesores* en sentido inverso de Collatz.
- Qué condiciones permiten la existencia de *cascadas impares*.
- Cómo se comportan las cascadas cuando se restringen a un conjunto especial (núcleo).
- Qué intervalos producen cascadas largas, cortas o triviales.
- Qué regularidades ocultas aparecen en la distribución de los núcleos y sus cascadas.

Así como una cascada natural revela la forma del terreno que la genera, las cascadas numéricas revelan la estructura profunda de los intervalos primales. Este capítulo construye un puente entre la **teoría modular de los primos** y la **dinámica discreta de Collatz**, mostrando que los intervalos primos pueden entenderse como **sistemas autosimilares en movimiento**, capaces de producir patrones recurrentes bajo transformaciones simples.

En otras palabras, los núcleos no sólo describen el centro del intervalo: **son el punto donde la aritmética comienza a fluir**.

Teorema 0.60 (Caso particular de núcleo y cascada)**.** *Sea el intervalo de primos consecutivos* (p, q) *con* $q = p + 4$*, y sea*

$$\mathcal{C} = \{p + 1,\ p + 2,\ p + 3\}, \qquad S_k = \sum_{x \in \mathcal{C}} x,$$

con residuo

$$r \equiv (S_k - q) \pmod{p}.$$

Entonces se cumple:

1. $r \equiv 2 \pmod{p}$*; en particular, el* primo residual *es* 2 *y el* núcleo *es* $N_k = 2$*.*

2. *Los predecesores de N_k en el sentido inverso de Collatz son:*

   - *Predecesor impar inexistente (pues $\frac{2-1}{3} \notin \mathbb{Z}$).*
   - *Predecesor par:* $2N_k = 4$.

3. *La cascada inducida por el núcleo es:*

$$2 \mapsto 4,$$

   y se corta en 4.

Demostración. Como $q = p + 4$, la suma de los tres enteros intermedios es

$$S_k = (p+1) + (p+2) + (p+3) = 3p + 6 = 3(p+2).$$

Entonces

$$S_k - q = (3p+6) - (p+4) = 2p + 2.$$

Al reducir módulo p se obtiene

$$r \equiv (S_k - q) \equiv 2p + 2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Por tanto, el núcleo asociado al intervalo es $N_k = 2$, con primo residual igual a 2.

Para los predecesores de Collatz de $N_k = 2$: el candidato impar sería $(2-1)/3 = 1/3$, que no es entero, por lo que no existe predecesor impar. El predecesor par siempre existe y es $2 \cdot N_k = 4$.

Finalmente, la cascada inducida por el núcleo comienza en 2 y da el paso único $2 \mapsto 4$. No hay continuación bajo la misma regla (no aparece otro predecesor impar válido desde 2), de modo que la cascada se corta en 4.

Esto vale para cualquier par de primos consecutivos con diferencia 4 (p. ej., $(43, 47)$ y $(67, 71)$), pues la deducción depende solo de $q = p + 4$. ■

Ejemplo 1: Intervalo (37,41)

Conjunto compuesto:

$$\{38, 39, 40\}.$$

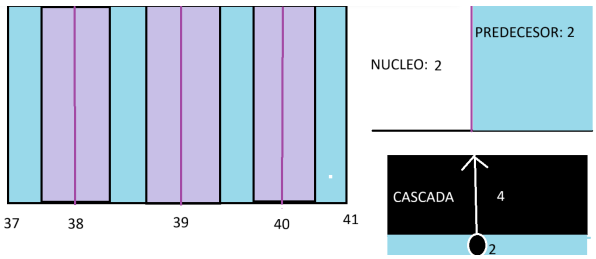


Figura 33: Núcleo, predecesor y cascada en el intervalo (37,41).

Cálculos básicos

$$S_k = 38 + 39 + 40 = 117, \qquad r \equiv (117 - 41) \pmod{37} = 76 \equiv 2 \pmod{37}.$$

Reducción:

$$2 \to 1 \quad (\text{primo residual } = 2).$$

Por tanto:

$$N_k = 2, \quad \text{Primo residual } = 2.$$

Predecesores

Para el núcleo $N_k = 2$:

$$\text{Impar: } \frac{2-1}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad \text{Par: } 2 \cdot N_k = 4.$$

Cascada

La cascada inducida por el núcleo es:

$$2 \mapsto 4,$$

y se corta en 4.

Resultado final

$$N_k = 2, \quad \text{Primo residual} = 2, \qquad \text{Predecesores desde } N_k : \{4\}, \qquad \text{Cascada} : 2 \mapsto 4.$$

0.18. Propiedades de Congruencia Inversa en Collatz

La sección describe cómo construir el árbol inverso de Collatz usando congruencias: todo n tiene siempre el predecesor par $2n$, y sólo tiene predecesor impar $\frac{n-1}{3}$ cuando $n \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{n-1}{3}$ es impar. Con la aplicación parcial $\Pi(n) = \frac{n-1}{3}$ (cuando existe) se encadenan estas ramas impares en una *cascada impar*, lo que revela dónde aparecen y se interrumpen las ramas impares del árbol.

Definición 0.61 (Predecesores de n)**.** Decimos que x es *predecesor* de n si $T(x) = n$. Existen dos formas según la paridad de x:

$$x = \begin{cases} 2n, & \text{si } x \text{ es par,} \\ \dfrac{n-1}{3}, & \text{si } x \text{ es impar, } n \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } \dfrac{n-1}{3} \text{ es impar.} \end{cases} \tag{0.38}$$

Ejemplo 0.62. 1) Si $(7, 11)$ y $(5, 7)$ son intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Trabajamos con los enteros dentro de cada intervalo y, para cada n, determinamos sus predecesores x tales que $T(x) = n$, usando la siguiente regla:

Intervalo $(7, 11)$: enteros $8, 9, 10$.

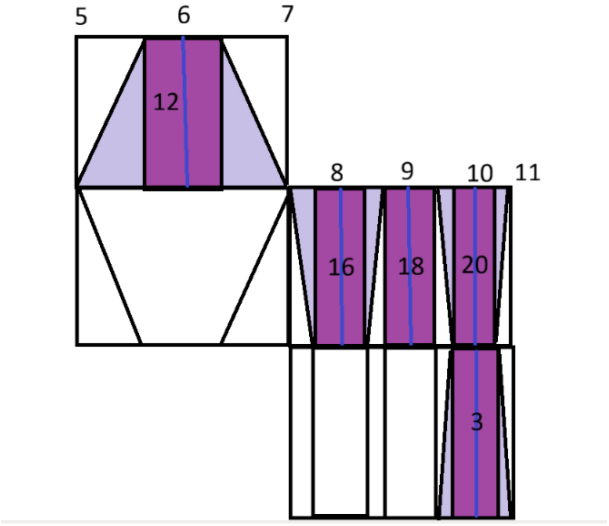


Figura 34: Predecesor (5,11).

$n = 8$ (caso par):

$$x = 2n = 16.$$

Caso impar: $8 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$ no aplica. Por tanto, los predecesores de 8 son $\{16\}$.

$n = 9$ (caso par):

$$x = 2n = 18.$$

Caso impar: $9 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$ no aplica. Por tanto, los predecesores de 9 son $\{18\}$.

$n = 10$ (caso par):

$$x = 2n = 20.$$

Caso impar: $10 \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{10-1}{3} = 3$ (impar) $\Rightarrow x = 3$ también es predecesor. Por tanto, los predecesores de 10 son $\{20, 3\}$.

Resumen para $(7, 11)$**:**

$$8 \mapsto \{16\}, \qquad 9 \mapsto \{18\}, \qquad 10 \mapsto \{20, 3\}.$$

Intervalo $(5, 7)$**:** entero 6.

$n = 6$ (caso par):

$$x = 2n = 12.$$

Caso impar: $6 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$ no aplica. Por tanto, los predecesores de 6 son $\{12\}$.

Conclusión. En el intervalo $(7, 11)$ sólo el número 10 posee un predecesor impar adicional ($x = 3$); los números 8 y 9 tienen únicamente el predecesor par $x = 2n$. En el intervalo $(5, 7)$, el único entero 6 también tiene sólo el predecesor par $x = 12$.

Cascada impar de predecesores

Dada la aplicación parcial $\Pi(n) = \frac{n-1}{3}$ (definida sólo cuando $n \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{n-1}{3}$ es impar), la *cascada impar* desde n_0 es la sucesión

$$n_0,\ n_1 = \Pi(n_0),\ n_2 = \Pi(n_1), \ldots \tag{0.39}$$

hasta que Π deja de estar definida. Intuitivamente, encadena todas las "ramas impares" del árbol inverso de Collatz. En los ejemplos: en $(7, 11)$ sólo 10 genera una cascada no trivial $[10, 3]$; en $(5, 7)$ la cascada es trivial, p.ej. $[6]$.

Definición 0.63 (Cascada impar de predecesores)**.** Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y definimos la aplicación parcial

$$\Pi(n) = \frac{n-1}{3} \quad \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } \frac{n-1}{3} \text{ es impar, y no definida en otro caso.}$$

La *cascada (impar) de predecesores* que parte de n_0 es la sucesión máxima

$$n_0,\ n_1 = \Pi(n_0),\ n_2 = \Pi(n_1),\ \ldots,\ n_\ell = \Pi(n_{\ell-1}). \tag{0.40}$$

Ejemplo 0.64. 1) Si $(7,11)$ y $(5,7)$ son intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Trabajamos con los enteros dentro de cada intervalo.

Intervalo $(7,11)$: enteros $8,9,10$. $n_0 = 8$: $8 \equiv 2 \pmod 3$, por tanto Π no está definida.

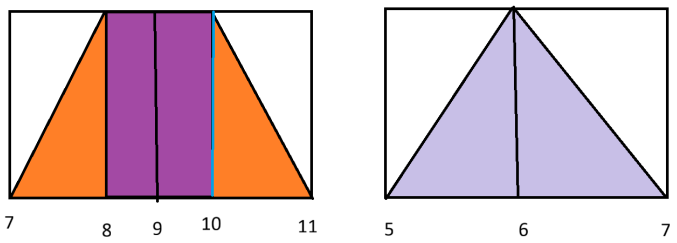


Figura 35: Representación de las cascadas impares de predecesores. En el intervalo $(7,11)$ solo el número 10 genera una cascada no trivial, mientras que en el intervalo $(5,7)$ no hay cascada definida.

Cascada: $[8]$.

$n_0 = 9$: $9 \equiv 0 \pmod 3$, por tanto Π no está definida. Cascada: $[9]$.

$n_0 = 10$: $10 \equiv 1 \pmod 3$ y $\dfrac{10-1}{3} = 3$ (impar), entonces $\Pi(10) = 3$. Luego $3 \equiv 0 \pmod 3$, así que ya no aplica Π. Cascada: $[10,3]$.

Intervalo $(5,7)$: entero 6.

$$n_0 = 6: \quad 6 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \Pi \text{ no definida. Cascada: } [6].$$

0.19. La dinámica natural de las cascadas numéricas

En la naturaleza, toda corriente busca descender. El agua que nace en las alturas no se detiene hasta encontrar el valle, dividiéndose, bifurcándose y transformándose en cada caída. Cada salto, cada nivel, conserva la huella del anterior, como si el movimiento llevara memoria de su origen.

En la aritmética sucede algo similar: los números también descienden. Cuando aplicamos la transformación $\Pi(n) = \frac{n-1}{3}$ a ciertos valores que cumplen con un orden secreto los que obedecen al módulo 3 y conservan su imparidad, se desencadena una

Figura 36: En la naturaleza, toda corriente busca descender. Del mismo modo, en la aritmética de los primos, la *cascada impar de predecesores* representa el flujo descendente de los números, que se simplifican paso a paso hasta alcanzar su forma más pura. Así como el agua encuentra su cauce, los números hallan su equilibrio en el descenso aritmético.

cascada numérica. Cada paso reduce, cada división simplifica, cada valor heredado guarda la esencia de quien le dio origen.

Así como un río pierde altura pero gana profundidad, la **cascada impar de predecesores** revela la estructura oculta en la secuencia de enteros: un flujo que no es continuo, sino selectivo, donde sólo algunos números pueden transformarse y continuar el descenso.

Cuando la cascada se corta por un límite aritmético o estructural, el proceso se detiene en equilibrio, como una laguna al final de una caída. Allí, el número que sobrevive se convierte en un vestigio de estabilidad, una forma numérica que ha resistido todas las divisiones posibles, de la misma manera que una roca permanece firme después del paso del agua.

La teoría de estas cascadas no describe únicamente un procedimiento algebraico: traza una analogía entre la dinámica natural y el orden matemático, recordándonos que incluso en lo discreto y finito, la naturaleza del cambio conserva siempre un principio de continuidad.

Definición 0.65 (Cascada restringida a un núcleo)**.** Sea $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto distinguido (por ejemplo, un conjunto de *primos del núcleo*). La *cascada en el núcleo* que parte de $n_0 \in \mathcal{N}$ es la sucesión obtenida iterando Π como arriba con la condición adicional $n_k \in \mathcal{N}$ para todo k. La cascada se *corta* en el primer k con $\Pi(n_k)$ no definida (corte aritmético) o bien $\Pi(n_k) \notin \mathcal{N}$ (corte estructural).

Ejemplo 0.66 (Cascada restringida en el núcleo $\mathcal{N} = \{2, 4, 8\}$)**.** Sea $\mathcal{N} = \{2, 4, 8\}$ y

considérese $n_0 = 2$. La función parcial es

$$\Pi(n) = \frac{n-1}{3} \quad \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } \frac{n-1}{3} \text{ es impar.}$$

Como $2 \not\equiv 1 \pmod 3$, $\Pi(2)$ no está definida.

Por tanto, la cascada en el núcleo se detiene inmediatamente:

$$[2],$$

y el corte es *aritmético*.

Nótese que, aunque $2 \cdot 2 = 4$ pertenece a $\mathcal{N}$, este paso corresponde a un predecesor par y no a la aplicación Π, por lo cual no forma parte de la cascada impar.

Ejemplo 0.67 (Cascada restringida en el núcleo $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6, 9\}$)**.** Sea ahora $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6, 9\}$ y tomemos $n_0 = 10$ fuera del núcleo. Como $10 \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{10-1}{3} = 3$ (impar), tenemos

$$\Pi(10) = 3.$$

El valor 3 sí pertenece a $\mathcal{N}$, de modo que el siguiente término es $n_1 = 3$.

Sin embargo, $3 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que $\Pi(3)$ no está definida. Por tanto, la cascada restringida al núcleo es:

$$[10, 3],$$

y termina con un *corte aritmético*.

Ejemplo 0.68 (Cascada con corte estructural)**.** Sea $\mathcal{N} = \{3, 9, 15, 21\}$ y tomemos $n_0 = 9$. Como $9 \equiv 0 \pmod 3$, $\Pi(9)$ no está definida, por tanto

$$[9]$$

sería una cascada trivial.

Pero si comenzamos con $n_0 = 10$ (fuera del núcleo), se obtiene $\Pi(10) = 3$. Aunque $\Pi(10)$ está definida, el resultado 3 sí pertenece a $\mathcal{N}$. El siguiente paso sería $\Pi(3)$, pero esta vez $\Pi(3)$ no está definida. Entonces la cascada restringida se corta estructuralmente, pues el siguiente valor ya no puede mantenerse dentro del conjunto $\mathcal{N}$.

$$[10, 3].$$

Proposición 0.69 (Existencia de predecesores impares en intervalos primales)**.** *En todo intervalo primal I_k con $L_k \geq 2$, existe al menos un número $n \in I_k$ tal que n posee un predecesor*

impar.

Demostración. Sea $I_k = (p_k, p_{k+1})$ con $L_k \geq 2$. Entre dos primos consecutivos, los enteros intermedios forman una progresión aritmética completa módulo 3, es decir, siempre aparece al menos un número congruente a $1 \pmod 3$.

Sea n el primero de ellos. Entonces $\frac{n-1}{3} \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{n-1}{3}$ es impar, n ya tiene un predecesor impar. Si no lo es, consideremos $n+3$. Este también cumple $n+3 \equiv 1 \pmod 3$. Dado que el intervalo tiene longitud $L_k \geq 2$, necesariamente existe algún $n, n+3, n+6, \ldots$ dentro de I_k cuya división entre 3 produzca un impar.

Por tanto, en cada intervalo primal con $L_k \geq 2$ existe al menos un n con predecesor impar. ■

0.20. Ejercicio

Ejercicio 0.149. Sea el intervalo primal $(p_k, p_{k+1}) = (7, 11)$. Calcula el conjunto de enteros intermedios, su suma S_k y el valor del núcleo N_k. Interpreta el núcleo como centro aritmético del intervalo.

Ejercicio 0.150. Considera el intervalo $(13, 17)$. Verifica que la media aritmética de los compuestos es $\frac{p_k+p_{k+1}}{2}$ y determina el núcleo N_k utilizando la congruencia $N_k \equiv \widetilde{S_k} \pmod{p_k}$.

Ejercicio 0.151. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (23, 29)$. Calcula L_k, S_k, $\widetilde{S_k}$ y verifica la identidad fundamental $N_k = \dfrac{p_{k+1} - p_k}{2}$. Explica por qué el núcleo representa el centro del bloque de compuestos.

Ejercicio 0.152. En el intervalo $(47, 53)$, determina el valor de N_k y muestra explícitamente que el centro del bloque es $m_k = p_k + N_k$. Explica por qué m_k coincide con la media aritmética de los compuestos.

Ejercicio 0.153. Demuestra que si $p_{k+1} - p_k = 4$, entonces $N_k = 2$ para todo intervalo primal de ese tipo. Ilustra esta propiedad usando el intervalo $(37, 41)$.

Ejercicio 0.154. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (59, 67)$. Calcula L_k, los compuestos intermedios y el núcleo N_k. Luego, representa el bloque núcleo B_k y verifica que su tamaño es $2N_k - 1$.

Ejercicio 0.155. Demuestra que $N_k < \dfrac{p_k}{2}$ para todo $k \geq 2$. Aplica esta propiedad al intervalo $(71, 79)$ y comprueba numéricamente que se cumple.

Ejercicio 0.156. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (89, 97)$. Calcula el bloque B_k, su suma S_k, el valor medio $\widetilde{S_k}$ y el núcleo N_k. Explica por qué un intervalo más largo produce un núcleo mayor.

Ejercicio 0.157. En el intervalo $(31, 37)$, determina el núcleo N_k y construye el centro $m_k = p_k + N_k$. Explica por qué m_k es el punto de simetría de los compuestos dentro del intervalo.

Ejercicio 0.158. Sea $(p_k, p_{k+1}) = (p, p + 2m)$ con $m \geq 1$. Prueba que el núcleo puede escribirse como $N_k = m$. Luego, discute cómo cambia la estructura del bloque núcleo cuando m aumenta.

Ejercicio 0.159. Sea un intervalo primal (p, q) con $q = p + 4$. Muestra que el núcleo es $N_k = 2$ y formula, sin resolver, la cascada inducida por el núcleo usando predecesores inversos de Collatz. Indica por qué no existe predecesor impar de 2.

Ejercicio 0.160. En el intervalo $(43, 47)$, considera el conjunto $\mathcal{C} = \{44, 45, 46\}$. Calcula $S_k = \sum_{x \in \mathcal{C}} x$ y plantea el residuo $r \equiv (S_k - q) \pmod{p}$. Explica por qué $r \equiv 2 \pmod{p}$ y vincula ese hecho con el valor del núcleo N_k.

Ejercicio 0.161. Define la aplicación parcial $\Pi(n) = \frac{n-1}{3}$ cuando $n \equiv 1 \pmod 3$ y $\frac{n-1}{3}$ es impar. Para el bloque B_k del intervalo $(61, 67)$, enumera los enteros $n \in B_k$ que activan Π, y escribe (sin ejecutar) la cascada impar que se originaría desde cada uno de ellos.

Ejercicio 0.162. Sea un intervalo (p, q) con $q = p + 2m$ y $m \geq 1$. Argumenta por qué el núcleo satisface $N_k = m$ y describe, cualitativamente, cómo esperas que cambien las cascadas del núcleo al pasar de $m = 2$ a $m = 3$ y $m = 4$.

Ejercicio 0.163. En el intervalo $(97, 101)$, determina B_k, S_k y el valor medio $\widetilde{S}_k$. Plantea el residuo $r \equiv (\widetilde{S}_k - q) \pmod{p}$ y usa ese dato para deducir el núcleo N_k. Finalmente, especifica (sin resolver) los posibles predecesores de Collatz que podrían enlazarse con N_k.

Ejercicio 0.164. Sea $I_k = (p_k, p_{k+1})$ con $L_k \geq 2$. Demuestra que existe al menos un $n \in I_k$ tal que $n \equiv 1 \pmod 3$. Luego, discute bajo qué condición adicional sobre n se garantiza que $\Pi(n)$ esté definida y sea impar.

Ejercicio 0.165. Considera el intervalo $(79, 89)$. (i) Determina L_k y B_k. (ii) Señala todos los $n \in B_k$ con $n \equiv 1 \pmod 3$. (iii) Para cada uno de esos n, plantea (sin ejecutar) el primer paso de la cascada impar mediante Π e indica si el resultado sería par o impar.

Ejercicio 0.166. Sea (p, q) un intervalo con $q = p + 6$. Calcula el núcleo N_k y compara la forma esperada de la cascada del núcleo con la del caso $q = p + 4$. Especifica qué diferencias estructurales anticipas en términos de existencia (o no) de predecesor impar del núcleo.

Ejercicio 0.167. Para $(137, 149)$: (i) lista B_k, (ii) identifica los elementos de B_k que son $\equiv 1 \pmod 3$, y (iii) para cada uno de ellos, escribe la expresión de su posible predecesor impar $\Pi(n)$ (si aplica). No ejecutes los cálculos; solo formula con claridad los pasos.

Ejercicio 0.168. Define la *cascada restringida al núcleo* como la iteración de Π manteniéndose en un conjunto designado $\mathcal{N}$. Elige $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6, 9\}$ y estudia el intervalo $(37, 41)$. Indica desde qué valores del bloque se puede entrar a $\mathcal{N}$ mediante un solo paso de Π y cuándo la cascada se corta (aritmética o estructuralmente).

Ejercicio 0.169. Sea un intervalo primal (p, q) con $q = p + 2m$ y $m \geq 1$. Define la *profundidad de cascada del núcleo* como el número de veces que puede aplicarse la función parcial $\Pi(n) = \frac{n-1}{3}$ (cuando está definida) partiendo de $N_k = m$ antes de cortarse (aritméticamente o por salir de un conjunto dado). Formula, sin resolver, un criterio necesario (modular) sobre m para que la profundidad sea al menos 1.

Ejercicio 0.170. Considera los intervalos (p, q) con $q = p + 4$ en el rango $p \in [43, 211]$. Para cada uno, especifica el bloque B_k, identifica los elementos $n \in B_k$ tales que $n \equiv 1 \pmod 3$ y redacta (sin ejecutar) las expresiones de sus potenciales predecesores impares $\Pi(n)$. Concluye, sin calcular, qué intervalo esperas que tenga más *candidatos* a iniciar cascadas impares dentro del bloque.

Ejercicio 0.171. Sea (p, q) con $q = p + 2m$ y núcleo $N_k = m$. Propón (sin demostrar) una cota superior heurística para la longitud de la *cascada impar* iniciada en N_k en función de la escritura de m en base 3 (pistas: ocurrencias de dígitos 1 y paridad de los cocientes sucesivos). Formula el enunciado de la cota con precisión.

Ejercicio 0.172. Para el intervalo $(89, 97)$, determina B_k y enumera los $n \in B_k$ que cumplen $n \equiv 1 \pmod 3$. Para cada uno, escribe la forma del primer paso de la cascada impar y especifica (sin resolver) en qué casos el siguiente término sería $\leq p$ y en cuáles $> p$.

Ejercicio 0.173. Sea $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12\}$. Define la *cascada restringida al núcleo* que parte desde N_k para intervalos con $q = p + 4$ y $p \in [61, 149]$. Indica para cuáles valores de p la cascada entra en $\mathcal{N}$ en un paso (o no entra) y cuándo se corta por motivo aritmético (Π no definida) o estructural ($\Pi(n) \notin \mathcal{N}$).

Ejercicio 0.174. Sea (p, q) con $q = p + 6$. Considera el núcleo $N_k = 3$ y define sus predecesores inversos de Collatz (par e impar, cuando aplique). Plantea (sin resolver) todas las posibles ramificaciones de la cascada hasta dos niveles, y describe qué condiciones modulares sobre los nodos intermedios fuerzan un corte.

Ejercicio 0.175. Estudia el intervalo $(127, 131)$. (i) Determina B_k, S_k y $\widetilde{S}_k$. (ii) Plantea el residuo $r \equiv (\widetilde{S}_k - q) \pmod p$ y deduce el núcleo N_k en función de $q - p$. (iii) Redacta la cascada del núcleo hasta el primer punto de corte, sin realizar cálculos numéricos.

Ejercicio 0.176. Define el *índice de ramificación* de una cascada impar como el número de veces (contadas con multiplicidad) que, a lo largo de la cascada iniciada en el núcleo

N_k, existe simultáneamente la posibilidad de continuar con un predecesor par y con un predecesor impar válidos. Formula, sin resolver, una condición necesaria para que el índice de ramificación sea 0 en intervalos con $q = p + 4$.

Ejercicio 0.177. Sea una familia de intervalos (p, q) con $q = p + 2m$ y m fijo. Propón un protocolo (paso a paso, sin ejecutar) para: (i) listar B_k, (ii) marcar los $n \equiv 1 \pmod 3$, (iii) construir el bosque de cascadas impares que nacen en esos n, y (iv) superponer la cascada del núcleo $N_k = m$ sobre el mismo grafo para comparar puntos de contacto (si los hay).

Ejercicio 0.178. Para $(p, q) = (223, 229)$ y $(p, q) = (229, 233)$: (i) redacta el bloque B_k de cada uno, (ii) identifica los $n \equiv 1 \pmod 3$ en cada bloque y sus candidatos $\Pi(n)$, y (iii) compara (sin calcular) qué intervalo debería presentar mayor probabilidad de cascadas impares más largas dentro del bloque y por qué (argumento modular y de densidad).

Impacto y Aportes Fundamentales de esta Obra

Este libro introduce una visión radicalmente nueva sobre la distribución de los números primos, integrando razonamiento matemático riguroso con intuición estructural, análisis dinámico y perspectiva cultural. A continuación, se sintetizan los aportes centrales que esta obra entrega a la teoría de números:

1. Nuevo enfoque estructural de los intervalos primales

Tradicionalmente, los primos se han estudiado como puntos aislados sobre la recta numérica. Este libro propone un cambio de paradigma: analizar los **bloques formados por cada intervalo primal**, incluyendo los compuestos internos, sus sumas, residuos, trayectorias modulares y transformaciones internas. Esto convierte cada intervalo en un objeto aritmético con estructura propia.

2. Definición y formalización del Conjunto D

Se introduce el **Conjunto D de números discontinuos prímales**, que encapsula la esencia modular de los intervalos entre primos consecutivos. Este conjunto permite clasificar, comparar y estudiar los intervalos desde una perspectiva dinámica y geométrica.

3. Noción de núcleo primo y bloques prímales

Se define el **núcleo primo** como el elemento central u originario de cada intervalo, y se construyen los **bloques prímales** como unidades fundamentales de información aritmética, modelando la distribución de los primos como estructuras interconectadas.

4. Índice de estabilidad

Se introduce el **índice de estabilidad**, una medida que evalúa la "resistencia" de un intervalo antes de converger a su primo residual, abriendo un nuevo campo de estudio sobre la dinámica interna de las brechas primales.

5. Mapa de discontinuidades

El **Mapa de Discontinuidades de los números primos** revela la oscilación, los saltos abruptos y las zonas de estabilidad en la sucesión de intervalos, mostrando las brechas como parte de un paisaje aritmético vivo.

6. Visión cultural, epistemológica y universal

Esta obra no solo aporta teoría matemática, sino también una **nueva manera de entender el conocimiento**:

- La matemática puede surgir desde los territorios, la naturaleza y las culturas indígenas.
- El pensamiento profundo no pertenece únicamente a los centros académicos.
- La diversidad epistemológica enriquece la ciencia y abre caminos inesperados.

En conjunto, este libro propone una arquitectura alternativa para comprender la distribución de los números primos, uniendo estructura interna, dinámica modular, interpretación geométrica y sentido cultural. Estos aportes abren nuevas líneas de investigación y establecen un puente entre la matemática formal, la intuición natural y la sabiduría ancestral.

Conclusión General

A lo largo de este libro, hemos recorrido las capas internas de la estructura de los números primos desde una perspectiva nueva: no observándolos como puntos aislados, sino como bloques vivos formados por intervalos, compuestos, residuos, núcleos y trayectorias dinámicas.

En el camino:

- Descubrimos que **los huecos entre primos contienen más información que los propios primos**. - Definimos el **intervalo primal** como un objeto matemático con longitud, suma, estabilidad, memoria interna y comportamiento modular. - Introdujimos la **huella residual** como un proceso de reducción que revela el "corazón" del intervalo. - Formulamos el **índice de estabilidad**, una medida cuantitativa de la resistencia de un intervalo antes de converger a su primo residual. - Encontramos **discontinuidades prímales**, mostrando que la distribución de primos forma un paisaje oscilatorio lleno de crestas y valles. - Construimos el **conjunto D de bloques núcleo**, una nueva entidad matemática que captura la esencia modular de los intervalos. - Elaboramos el **Mapa de Discontinuidades**, identificando patrones recurrentes, ciclos y estructuras profundas en la sucesión de intervalos. - Vinculamos estas ideas con **dinámicas tipo Collatz**, revelando conexiones inesperadas entre teoría de números y sistemas iterativos.

Este recorrido demuestra una idea central: **la verdadera riqueza de los números primos no está solamente en su posición, sino en las transformaciones internas que ocurren entre ellos.**

Así como la naturaleza revela su historia en los anillos de un árbol o en las capas de la tierra, la aritmética revela su profundidad en los bloques entre primos y en la dinámica de sus residuos.

—

Más que una teoría… un comienzo

Este libro no pretende cerrar un tema, sino abrir un nuevo camino. Los conceptos aquí introducidos —huella residual, índice de estabilidad, conjunto D, discontinuidades prímales— son solo la base de una teoría más amplia que puede crecer hacia:

- densidades asintóticas, - estructuras modulares avanzadas, - nuevas conjeturas sobre la distribución de primos, - conexiones geométricas y físicas, - sistemas dinámicos aritméticos.

—

Un legado para el futuro

Este trabajo nace desde la intuición, la naturaleza, el pensamiento profundo y el compromiso con el conocimiento libre. Es una invitación para que futuras generaciones de matemáticos exploren estos bloques, extiendan estas ideas y continúen construyendo sobre este nuevo lenguaje.

Porque los números primos siguen guardando secretos. Y este libro es una llave para abrir otra puerta.

La investigación continúa.

CAPÍTULO 6. ANEXOS

Intervalos de Números Primos con 13 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(293, 307)	293, 307	13
(317, 331)	317, 331	13
(557, 571)	557, 571	13

Intervalos de Números Primos con 15 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(53–71)	53, 71	15
(113–131)	113, 131	15
(173–191)	173, 191	15
(293–311)	293, 311	15
(353–373)	353, 373	19
(593–613)	593, 613	19
(1019–1039)	1019, 1039	19
(1289–1309)	1289, 1309	19
(1453–1471)	1453, 1471	17

Intervalos de Números Primos con 17 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(523–541)	523, 541	17
(881– 899)	881, 899	17
(1087–1103)	1087, 1103	17
(1993–2011)	1993, 2011	17
(3253–3271)	3253, 3271	17
(4421– 4441)	4421, 4441	19

Intervalos de Números Primos con 19 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(89–109)	89, 109	19
(127–149)	127, 149	21
(191–211)	191, 211	19
(307– 327)	307, 327	19
(401–421)	401, 421	19
(661– 683)	661, 683	21
(761– 787)	761, 787	25

Intervalos de Números Primos con 21 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(113– 137)	113, 137	23
(227– 251)	227, 251	23
(523– 547)	523, 547	23
(887– 911)	887, 911	23
(1129– 1153)	1129, 1153	23

Intervalos de Números Primos con 23 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(89– 113)	89, 113	23
(227– 251)	227, 251	23
(661– 683)	661, 683	21
(1051– 1073)	1051, 1073	21

Intervalos de Números Primos con 25 Números Entre Ellos

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(307– 331)	307, 331	23
(761– 787)	761, 787	25
(1151–1177)	1151, 1177	25
(2029–2053)	2029, 2053	23
(3461– 3487)	3461, 3487	25

Anexo X. Intervalos entre números primos consecutivos

Este anexo ofrece una visión panorámica, precisa y ordenada del comportamiento real de los intervalos entre números primos. Cada fila de la tabla presenta un par de primos consecutivos (p_k, p_{k+1}) y la cantidad exacta de números enteros que se encuentran entre ellos, calculada mediante la expresión:

$$\text{Cantidad de números entre ellos} = p_{k+1} - p_k - 1.$$

La tabla fue construida a partir de la aplicación de la *Criba de Eratóstenes*, generando todos los primos en un rango determinado y analizando las brechas consecutivas. Este registro detallado permite observar empíricamente la irregularidad de la sucesión de primos: algunas brechas son pequeñas, otras moderadas y, en ocasiones, aparecen saltos sorprendentemente grandes.

Este anexo es una herramienta esencial por varias razones:

- Permite visualizar la **discontinuidad primal** en la distribución de los primos.
- Sirve como base para el estudio de los **bloques prímales** y sus estructuras internas.
- Proporciona datos concretos para la construcción y análisis del **conjunto** D.
- Facilita el cálculo y la comparación del **índice de estabilidad** asociado a cada intervalo.

Cuadro 12: Intervalos de primos con cinco números entre ellos

Intervalo	Primos	Observación
(23,29)	23, 29	Cinco números entre los primos
(31,37)	31, 37	Cinco números entre los primos
(47,53)	47, 53	Cinco números entre los primos
(53,59)	53, 59	Cinco números entre los primos
(61,67)	61, 67	Cinco números entre los primos
(73,79)	73, 79	Cinco números entre los primos
(83,89)	83, 89	Cinco números entre los primos
(97,103)	97, 103	Cinco números entre los primos
(109,113)	109, 113	Cinco números entre los primos
(127,131)	127, 131	Cinco números entre los primos
(139,149)	139, 149	Cinco números entre los primos
(151,157)	151, 157	Cinco números entre los primos
(163,167)	163, 167	Cinco números entre los primos
(173,179)	173, 179	Cinco números entre los primos
(181,191)	181, 191	Cinco números entre los primos
(193,197)	193, 197	Cinco números entre los primos
(199,211)	199, 211	Cinco números entre los primos
(223,227)	223, 227	Cinco números entre los primos
(229,233)	229, 233	Cinco números entre los primos
(239,241)	239, 241	Cinco números entre los primos
(251,257)	251, 257	Cinco números entre los primos
(263,269)	263, 269	Cinco números entre los primos
(271,277)	271, 277	Cinco números entre los primos
(281,283)	281, 283	Cinco números entre los primos
(293,307)	293, 307	Cinco números entre los primos
(311,313)	311, 313	Cinco números entre los primos
(317,331)	317, 331	Cinco números entre los primos
(337,347)	337, 347	Cinco números entre los primos
(349,353)	349, 353	Cinco números entre los primos

En síntesis, esta tabla constituye el **soporte empírico** de muchas de las ideas desarrolladas a lo largo de este libro y ofrece un punto de partida sólido para la observación de patrones, la formulación de conjeturas y el desarrollo de nuevas perspectivas en torno al comportamiento de los números primos.

Intervalo	Primos	Cantidad de Números Entre Ellos
(2, 3)	2, 3	0

(3, 5)	3, 5	1
(5, 7)	5, 7	1
(7, 11)	7, 11	3
(11, 13)	11, 13	1
(13, 17)	13, 17	3
(17, 19)	17, 19	1
(19, 23)	19, 23	3
(23, 29)	23, 29	5
(29, 31)	29, 31	1
(31, 37)	31, 37	5
(37, 41)	37, 41	3
(41, 43)	41, 43	1
(43, 47)	43, 47	3
(47, 53)	47, 53	5
(53, 59)	53, 59	5
(59, 61)	59, 61	1
(61, 67)	61, 67	5
(67, 71)	67, 71	3
(71, 73)	71, 73	1
(73, 79)	73, 79	5
(79, 83)	79, 83	3
(83, 89)	83, 89	5
(89, 97)	89, 97	7
(97, 101)	97, 101	3
(101, 103)	101, 103	1
(103, 107)	103, 107	3
(107, 109)	107, 109	1
(109, 113)	109, 113	3
(113, 127)	113, 127	13
(127, 131)	127, 131	3
(131, 137)	131, 137	5
(137, 139)	137, 139	1
(139, 149)	139, 149	9
(149, 151)	149, 151	1
(151, 157)	151, 157	5

(157, 163)	157, 163	5
(163, 167)	163, 167	3
(167, 173)	167, 173	5
(173, 179)	173, 179	5
(179, 181)	179, 181	1
(181, 191)	181, 191	9
(191, 193)	191, 193	1
(193, 197)	193, 197	3
(197, 199)	197, 199	1
(199, 211)	199, 211	11
(211, 223)	211, 223	11
(223, 227)	223, 227	3
(227, 229)	227, 229	1
(229, 233)	229, 233	3
(233, 239)	233, 239	5
(239, 241)	239, 241	1
(241, 251)	241, 251	9
(251, 257)	251, 257	5
(257, 263)	257, 263	5
(263, 269)	263, 269	5
(269, 271)	269, 271	1
(271, 277)	271, 277	5
(277, 281)	277, 281	3
(281, 283)	281, 283	1
(283, 293)	283, 293	9
(293, 307)	293, 307	13
(307, 311)	307, 311	3
(311, 313)	311, 313	1
(313, 317)	313, 317	3
(317, 331)	317, 331	13
(331, 337)	331, 337	5
(337, 347)	337, 347	9
(347, 349)	347, 349	1
(349, 353)	349, 353	3
(353, 359)	353, 359	5

(359, 367)	359, 367	7
(367, 373)	367, 373	5
(373, 379)	373, 379	5
(379, 383)	379, 383	3
(383, 389)	383, 389	5
(389, 397)	389, 397	7
(397, 401)	397, 401	3
(401, 409)	401, 409	7
(409, 419)	409, 419	9
(419, 421)	419, 421	1
(421, 431)	421, 431	9
(431, 433)	431, 433	1
(433, 439)	433, 439	5
(439, 443)	439, 443	3
(443, 449)	443, 449	5
(449, 457)	449, 457	7
(457, 461)	457, 461	3
(461, 463)	461, 463	1
(463, 467)	463, 467	3
(467, 479)	467, 479	11
(479, 487)	479, 487	7
(487, 491)	487, 491	3
(491, 499)	491, 499	7
(499, 503)	499, 503	3
(503, 509)	503, 509	5
(509, 521)	509, 521	11
(521, 523)	521, 523	1
(523, 541)	523, 541	17
(541, 547)	541, 547	5
(547, 557)	547, 557	9
(557, 563)	557, 563	5
(563, 569)	563, 569	5
(569, 571)	569, 571	1
(571, 577)	571, 577	5
(577, 587)	577, 587	9

(587, 593)	587, 593	5
(593, 599)	593, 599	5
(599, 601)	599, 601	1
(601, 607)	601, 607	5
(607, 613)	607, 613	5
(613, 617)	613, 617	3
(617, 619)	617, 619	1
(619, 631)	619, 631	11
(631, 641)	631, 641	9
(641, 643)	641, 643	1
(643, 647)	643, 647	3
(647, 653)	647, 653	5
(653, 659)	653, 659	5
(659, 661)	659, 661	1
(661, 673)	661, 673	11
(673, 677)	673, 677	3
(677, 683)	677, 683	5
(683, 691)	683, 691	7
(691, 701)	691, 701	9
(701, 709)	701, 709	7
(709, 719)	709, 719	9
(719, 727)	719, 727	7
(727, 733)	727, 733	5
(733, 739)	733, 739	5
(739, 743)	739, 743	3
(743, 751)	743, 751	7
(751, 757)	751, 757	5
(757, 761)	757, 761	3
(761, 769)	761, 769	7
(769, 773)	769, 773	3
(773, 787)	773, 787	13
(787, 797)	787, 797	9
(797, 809)	797, 809	11
(809, 811)	809, 811	1
(811, 821)	811, 821	9

(821, 823)	821, 823	1
(823, 827)	823, 827	3
(827, 829)	827, 829	1
(829, 839)	829, 839	9
(839, 853)	839, 853	13
(853, 857)	853, 857	3
(857, 859)	857, 859	1
(859, 863)	859, 863	3
(863, 877)	863, 877	13
(877, 881)	877, 881	3
(881, 883)	881, 883	1
(883, 887)	883, 887	3
(887, 907)	887, 907	19
(907, 911)	907, 911	3
(911, 919)	911, 919	7
(919, 929)	919, 929	9
(929, 937)	929, 937	7
(937, 941)	937, 941	3
(941, 947)	941, 947	5
(947, 953)	947, 953	5
(953, 967)	953, 967	13
(967, 971)	967, 971	3
(971, 977)	971, 977	5
(977, 983)	977, 983	5
(983, 991)	983, 991	7
(991, 997)	991, 997	5
(997, 1009)	997, 1009	11
(1009, 1013)	1009, 1013	3
(1013, 1019)	1013, 1019	5
(1019, 1021)	1019, 1021	1
(1021, 1031)	1021, 1031	9
(1031, 1033)	1031, 1033	1
(1033, 1039)	1033, 1039	5
(1039, 1049)	1039, 1049	9
(1049, 1051)	1049, 1051	1

(1051, 1061)	1051, 1061	9
(1061, 1063)	1061, 1063	1
(1063, 1069)	1063, 1069	5
(1069, 1087)	1069, 1087	17
(1087, 1091)	1087, 1091	3
(1091, 1093)	1091, 1093	1
(1093, 1097)	1093, 1097	3
(1097, 1103)	1097, 1103	5
(1103, 1109)	1103, 1109	5
(1109, 1117)	1109, 1117	7
(1117, 1123)	1117, 1123	5
(1123, 1129)	1123, 1129	5
(1129, 1151)	1129, 1151	21
(1151, 1153)	1151, 1153	1
(1153, 1163)	1153, 1163	9
(1163, 1171)	1163, 1171	7
(1171, 1181)	1171, 1181	9
(1181, 1187)	1181, 1187	5
(1187, 1193)	1187, 1193	5
(1193, 1201)	1193, 1201	7
(1201, 1213)	1201, 1213	11
(1213, 1217)	1213, 1217	3
(1217, 1223)	1217, 1223	5
(1223, 1229)	1223, 1229	5
(1229, 1231)	1229, 1231	1
(1231, 1237)	1231, 1237	5
(1237, 1249)	1237, 1249	11
(1249, 1259)	1249, 1259	9
(1259, 1277)	1259, 1277	17
(1277, 1279)	1277, 1279	1
(1279, 1283)	1279, 1283	3
(1283, 1289)	1283, 1289	5
(1289, 1291)	1289, 1291	1
(1291, 1297)	1291, 1297	5
(1297, 1301)	1297, 1301	3

(1301, 1303)	1301, 1303	1
(1303, 1307)	1303, 1307	3
(1307, 1319)	1307, 1319	11
(1319, 1321)	1319, 1321	1
(1321, 1327)	1321, 1327	5
(1327, 1361)	1327, 1361	33
(1361, 1367)	1361, 1367	5
(1367, 1373)	1367, 1373	5
(1373, 1381)	1373, 1381	7
(1381, 1399)	1381, 1399	17
(1399, 1409)	1399, 1409	9
(1409, 1423)	1409, 1423	13
(1423, 1427)	1423, 1427	3
(1427, 1429)	1427, 1429	1
(1429, 1433)	1429, 1433	3
(1433, 1439)	1433, 1439	5
(1439, 1447)	1439, 1447	7
(1447, 1451)	1447, 1451	3
(1451, 1453)	1451, 1453	1
(1453, 1459)	1453, 1459	5
(1459, 1471)	1459, 1471	11
(1471, 1481)	1471, 1481	9
(1481, 1483)	1481, 1483	1
(1483, 1487)	1483, 1487	3
(1487, 1489)	1487, 1489	1
(1489, 1493)	1489, 1493	3
(1493, 1499)	1493, 1499	5
(1499, 1511)	1499, 1511	11
(1511, 1523)	1511, 1523	11
(1523, 1531)	1523, 1531	7
(1531, 1543)	1531, 1543	11
(1543, 1549)	1543, 1549	5
(1549, 1553)	1549, 1553	3
(1553, 1559)	1553, 1559	5
(1559, 1567)	1559, 1567	7

(1567, 1571)	1567, 1571	3
(1571, 1579)	1571, 1579	7
(1579, 1583)	1579, 1583	3
(1583, 1597)	1583, 1597	13
(1597, 1601)	1597, 1601	3
(1601, 1607)	1601, 1607	5
(1607, 1609)	1607, 1609	1
(1609, 1613)	1609, 1613	3
(1613, 1619)	1613, 1619	5
(1619, 1621)	1619, 1621	1
(1621, 1627)	1621, 1627	5
(1627, 1637)	1627, 1637	9
(1637, 1657)	1637, 1657	19
(1657, 1663)	1657, 1663	5
(1663, 1667)	1663, 1667	3
(1667, 1669)	1667, 1669	1
(1669, 1693)	1669, 1693	23
(1693, 1697)	1693, 1697	3
(1697, 1699)	1697, 1699	1
(1699, 1709)	1699, 1709	9
(1709, 1721)	1709, 1721	11
(1721, 1723)	1721, 1723	1
(1723, 1733)	1723, 1733	9
(1733, 1741)	1733, 1741	7
(1741, 1747)	1741, 1747	5
(1747, 1753)	1747, 1753	5
(1753, 1759)	1753, 1759	5
(1759, 1777)	1759, 1777	17
(1777, 1783)	1777, 1783	5
(1783, 1787)	1783, 1787	3
(1787, 1789)	1787, 1789	1
(1789, 1801)	1789, 1801	11
(1801, 1811)	1801, 1811	9
(1811, 1823)	1811, 1823	11
(1823, 1831)	1823, 1831	7

(1831, 1847)	1831, 1847	15
(1847, 1861)	1847, 1861	13
(1861, 1867)	1861, 1867	5
(1867, 1871)	1867, 1871	3
(1871, 1873)	1871, 1873	1
(1873, 1877)	1873, 1877	3
(1877, 1879)	1877, 1879	1
(1879, 1889)	1879, 1889	9
(1889, 1901)	1889, 1901	11
(1901, 1907)	1901, 1907	5
(1907, 1913)	1907, 1913	5
(1913, 1931)	1913, 1931	17
(1931, 1933)	1931, 1933	1
(1933, 1949)	1933, 1949	15
(1949, 1951)	1949, 1951	1
(1951, 1973)	1951, 1973	21
(1973, 1979)	1973, 1979	5
(1979, 1987)	1979, 1987	7
(1987, 1993)	1987, 1993	5
(1993, 1997)	1993, 1997	3
(1997, 1999)	1997, 1999	1

Glosario

Este glosario reúne los principales conceptos, símbolos y estructuras utilizados a lo largo del libro. Cada definición combina precisión matemática con una breve interpretación conceptual, mostrando cómo la aritmética y la dinámica de los primos se entrelazan en un mismo sistema.

Intervalo primal (p_k, p_{k+1})**:** Conjunto de números enteros comprendidos estrictamente entre dos primos consecutivos p_k y p_{k+1}.

Tipo m **del intervalo:** Cantidad de enteros compuestos que existen entre dos primos consecutivos:

$$m = p_{k+1} - p_k - 1.$$

Brecha prima (g_k)**:** Diferencia entre dos primos consecutivos:

$$g_k = p_{k+1} - p_k.$$

Longitud del intervalo (L_k)**:** Número de enteros intermedios entre p_k y p_{k+1}:

$$L_k = g_k - 1.$$

Suma de compuestos (S_k)**:** Suma total de los números compuestos comprendidos en el intervalo (p_k, p_{k+1}).

Ajuste modular $(\widetilde{S}_k)$**:** Versión normalizada de la suma S_k, obtenida según la divisibilidad por 2 o 5:

$$\widetilde{S}_k = \begin{cases} \dfrac{S_k}{2}, & \text{si } 2 \mid S_k, \\ \dfrac{S_k}{5}, & \text{si } 5 \mid S_k \text{ y } 2 \nmid S_k, \\ S_k, & \text{si } \gcd(S_k, 10) = 1. \end{cases}$$

Residuo modular (r)**:** Valor que mide la diferencia entre el ajuste $\widetilde{S}_k$ y el primo superior, módulo el primo inferior:

$$r \equiv (\widetilde{S}_k - p_{k+1}) \pmod{p_k}.$$

$\mathrm{spf}(n)$ **– Menor factor primo:** El número primo más pequeño que divide a n. Ejemplo: $\mathrm{spf}(18) = 2$.

Huella residual: Proceso iterativo que divide un número entre su menor factor primo hasta llegar a un número primo. Genera la secuencia:

$$r_0, \quad r_1 = \frac{r_0}{\mathrm{spf}(r_0)}, \quad r_2 = \frac{r_1}{\mathrm{spf}(r_1)}, \ \ldots$$

Primo residual $\mathrm{HR}(r_0)$**:** Primo final obtenido al concluir la huella residual. Representa el "núcleo estable" del proceso.

Función complementaria $h(r)$**:** Describe el comportamiento límite de la secuencia residual cuando ésta no alcanza un primo.

Índice de estabilidad (E_k)**:** Suma de los logaritmos naturales de los términos de la huella residual:

$$E_k = \sum_i \ln(r_i).$$

Mide la resistencia del intervalo antes de alcanzar su primo residual.

Clasificación por estabilidad:

- E_k pequeño $\Rightarrow$ convergencia rápida.
- E_k grande $\Rightarrow$ trayectoria extensa, alta complejidad interna.

Discontinuidad primal: Cambio abrupto en la estabilidad de intervalos consecutivos:

$$|E_k - E_{k-1}| > \delta.$$

Cresta y valle: Un intervalo es *cresta* si $L_{k-1} < L_k > L_{k+1}$ y *valle* si $L_{k-1} > L_k < L_{k+1}$.

Variación total $(\mathrm{Var}(m,n))$**:** Medida de la inestabilidad acumulada entre los intervalos m y n:

$$\mathrm{Var}(m,n) = \sum_{k=m}^{n-1} |L_{k+1} - L_k|.$$

Salto inmediato (J_k)**:** Diferencia entre longitudes consecutivas:

$$J_k = |L_{k+1} - L_k|.$$

Conjunto D (bloques núcleo): Nuevo objeto matemático que sintetiza la estructura modular, residual y dinámica de cada intervalo primo.

Mapa de discontinuidades: Representación global de los intervalos primales y sus variaciones, que revela patrones, ciclos y simetrías ocultas.

Cascadas aritméticas: Procesos iterativos derivados de la huella residual, análogos a sistemas dinámicos tipo Collatz.

Conexión con Collatz: Analogía entre las divisiones sucesivas de la huella residual y las transformaciones del tipo $3n + 1$.

Primos gemelos: Pares de primos que difieren en dos unidades, $(p, p+2)$, con longitud $L = 1$.

Sobre el Autor

Jonathan Rangel Castaño es un investigador y docente colombiano cuya obra se caracteriza por la unión entre la intuición natural, el pensamiento profundo y la formalización matemática rigurosa. Su formación académica se complementa con una experiencia única: el diálogo

permanente con la comunidad Misak del resguardo de Piendamó (Cauca), territorio donde ha desarrollado gran parte de sus investigaciones.

A diferencia de las trayectorias tradicionales en matemáticas, su visión nace de la observación directa de la naturaleza: los troncos de los árboles, las cascadas, los ciclos del agua y los patrones del paisaje se convirtieron en su laboratorio viviente. Desde allí, comprendió que la estructura del mundo físico contiene claves aritméticas profundas, especialmente en la distribución de los números primos.

Como docente en la *Institución Educativa Técnico Agroambiental Ala Kusrei Ya Misak Piscitau*, ha formado generaciones de estudiantes integrando el pensamiento científico con la sabiduría ancestral. Su trabajo no solo transmite conocimiento: inspira a pensar, a observar y a crear.

Es autor de una propuesta original en teoría de números basada en los intervalos entre primos, la huella residual, el índice de estabilidad y el conjunto D de bloques núcleo, abriendo una nueva forma de comprender la distribución primal. Además, ha desarrollado modelos en geometría diferencial y física matemática, donde introduce nuevas constantes trascendentales vinculadas a flujos de energía y curvatura.

Su obra representa una matemática con identidad, nacida desde los territorios y al servicio de la humanidad. Demuestra que la investigación de alto nivel no surge solo en laboratorios o universidades, sino también en las montañas, en la comunidad y en la mente de quienes observan el mundo con profundidad.

Jonathan Rangel Castaño pertenece a una nueva generación de matemáticos que no repiten lo establecido, sino que crean estructura, lenguaje y teoría. Su trabajo abre un camino para futuros investigadores y afirma una verdad poderosa:

La matemática también tiene raíces, memoria y corazón.

Conclusiones Generales

El estudio de los números primos ha acompañado a la humanidad desde los orígenes del pensamiento matemático. Sin embargo, este libro propone mirar más allá de su distribución aparente y de sus propiedades aritméticas clásicas, para comprenderlos como el resultado de **dinámicas internas** que emergen dentro del propio sistema de los enteros.

A lo largo de esta obra se ha desarrollado una nueva perspectiva sustentada en el conjunto $\mathbb{D}$, los *bloques primales*, la *huella residual*, el *núcleo primo*, los *intervalos de estabilidad* y las *zonas de discontinuidad*. Estos conceptos revelan que la secuencia de los números primos no es caótica ni aleatoria, sino que responde a **estructuras recurrentes y patrones de equilibrio** que pueden ser observados, medidos y descritos.

Entre los aportes más significativos de este enfoque se destacan:

- La interpretación modular y geométrica de la primalidad.
- La identificación de simetrías internas en las brechas entre primos.
- La descripción de los primos mediante dinámicas aritméticas en lugar de fórmulas cerradas.
- La conexión entre la teoría de números, los sistemas dinámicos y la geometría discreta.
- La posibilidad de concebir una matemática visual, estructural e intuitiva.

Más allá de su valor teórico, esta obra propone una matemática **viva y creativa**, en la que los números primos dejan de ser puntos aislados para convertirse en manifestaciones de un orden profundo. Cada intervalo, cada residuo y cada núcleo muestran que incluso en el aparente desorden existe una armonía subyacente.

Asimismo, el texto tiene un componente cultural y epistemológico esencial: demuestra que el pensamiento matemático también puede nacer desde los territorios, desde las comunidades y desde los lenguajes propios. La teoría aquí presentada reivindica la idea de una matemática **humana e intercultural**, que surge del diálogo entre la intuición, la naturaleza y la razón.

Finalmente, este libro no pretende clausurar el estudio de los números primos, sino abrir nuevas rutas de exploración. Las estructuras identificadas en el conjunto $\mathbb{D}$ sugieren vínculos potenciales con la hipótesis de Riemann, las conjeturas de Goldbach y Polignac, los modelos computacionales y los sistemas dinámicos discretos.

En suma, esta obra no representa un punto final, sino un **punto de partida**. El camino que se abre invita a seguir investigando, demostrando y descubriendo. Porque los números primos no sólo son infinitos en cantidad... **también lo son en significado y en posibilidades.**

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alonso, J. C. P. *33 sobre la distribución de los números primos: el postulado de Bertrand*.

[2] Arbeláez, R. F. (1980). *Apuntes sobre una relación entre números primos*. Boletín de Matemáticas, 14(1), 127–144.

[3] Assis, D. I. D. (2020). *Os números primos como instrumento de estímulo à curiosidade dos estudantes*.

[4] Bang, T. (1955). *Grandes números primos*. Revista Colombiana de Matemáticas, 4(2–5), 45–59.

[5] Bayer i Isant, P. (1979). *Sobre el índice de irregularidad de los números primos*. Collectanea Mathematica, 30(1), 11–20.

[6] Bor, G., & CIMAT, G. (1998). *Introducción a la teoría de números*. México: Centro de Investigación en Matemáticas.

[7] Buriticá, O. I. T. (2016). *Algoritmo recursivo funcional para verificación y monitoreo de la densidad de números primos*. Redes de Ingeniería, 7(2), 116–126.

[8] Carrilero, M. J. P., & Madrid, M. J. (2015). *Propuestas de innovación para la enseñanza de los números primos*. Epsilon, 89, 67–74.

[9] Castelao, J. M. P., & Sánchez, L. G. (2000). *Sobre los números primos*. Epsilon, (48), 291–306.

[10] Cilleruelo, J. (2010). *Los números* (Vol. 15). Editorial CSIC.

[11] Conde del Águila, R. (1974). *Raíces primitivas de números primos*.

[12] Escobar, H. A. (1991). *Los números primos*. Sigma, (6), 33–42.

[13] Espinoza, A. *Fórmula de números primos*.

[14] Euler, L. (1741). *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 141–146.

[15] Euler, L. (1774). *Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia*. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 85–135.

[16] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press.

[17] Ferreira, J. W. P. (2017). *El patrón de los números primos*. Applied Mathematics, 8, 180–192.

[18] Ferreira, G. M., & Rodrigues, L. F. C. (2023). *Os números primos: uma análise no campo dos complexos*. Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, 3(1).

[19] Fritsche, W. C. (2023). *Uma breve introdução à infinidade dos números primos*.

[20] García Garcinuño, C. (2023). *Infinitud de números primos en progresiones aritméticas*.

[21] Gil Gómez, J. A. (2014). *Evaluación de números primos en lenguaje C*.

[22] Granville, A., & Martin, G. (2005). *Carreras de números primos*. La Gaceta de la RSME, 8, 197–240.

[23] Horváth, J. (1952). *Números primos I*. Revista Colombiana de Matemáticas, 1(2–3), 21–33.

[24] Horváth, J. (1952). *Números primos II*. Revista Colombiana de Matemáticas, 1(4–5), 70–78.

[25] Horváth, J. (1953). *Números primos III*. Revista Colombiana de Matemáticas, 2(2), 21–37.

[26] Horváth, J. (1953). *Números primos IV*. Revista Colombiana de Matemáticas, 2(3), 54–72.

[27] Kelvin, L. (2004). *Números primos*. Matemáticas amenas, 47.

[28] López Sancho, J. M., Moreno Gómez, E., Gómez Díaz, M. J., & López Álvarez, J. M. (2004). *La maravillosa historia de los números*.

[29] Massa, F. G. I. (2024). *Teorema de los cuatro colores, polinomio de probabilidades y cinco conjeturas en números primos*. Studies in Engineering and Exact Sciences, 5(2), e8843.

[30] Medina, J. D. J. C. *Números primos: enigmas y aplicaciones*.

[31] Medina, J. D. J. C. (2013). *Misterio de los números primos y fórmulas generadoras*. Revista Vinculando.

[32] Minchola, G. L. T., & Lizbeth, G. (2019). *Teorema de los números primos*.

[33] De Oliveira Holanda Filho, I., Mesquita Da Cruz, M. P., Farias Da Costa, E., & Léo Ramos Gomes, R. (2020). *Números primos: os átomos da Matemática*. Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo, (septiembre).

[34] Padilha, J. C. R. (2013). *Números primos*.

[35] Palacios, R. (1994). *¿Cuándo son dos números primos entre sí?* Lecturas Matemáticas, 15(2), 321–330.

[36] Pantoja Mora, B. A. (2017). *Una introducción a los números de Carmichael*.

[37] Pickover, C. A. (2002). *El prodigio de los números*. Ediciones Robinbook.

[38] Pizzamiglio, F., Dorneles Ricardo, V., & Martinotto André, L. (2008). *Uma solução paralela para a busca de números primos de Mersenne*. HÍFEN XIII Simpósio de Informática – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS).

[39] Ribenboim, P. (1991). *The Little Book of Bigger Primes*. Springer Science & Business Media.

[40] Riemann, B. (1859). *Sobre el número de números primos menores que una magnitud dada*. Monatsberichte der Berliner Akademie, 671–680.

[41] Rojo, J. R. (2013). *Recopilación de diversas demostraciones de la infinitud de los números primos*. Tesis de Maestría, Universidad de La Rioja.

[42] Rubio, D. (2024). *Algunas observaciones computacionales sobre la distribución de los números primos*. Revista de Ciencias, 27(1).

[43] Salazar, A. V., & Rosillo, F. V. (2023). *De la función $Pr = 2Nx + 5$ y el descarte del triángulo de generadores de números compuestos a la generación de los números primos*. Matemática, 21(2).

[44] Sánchez, D. G., & Lorente, F. C. *La función zeta de Riemann y su relación con los números primos*.

[45] Santiago Guillen, D. (2021). *Convergencia de la serie de los recíprocos de los números primos gemelos*.

[46] Santos, L. (2017). *Conceitos, números primos e resolução de problemas*.

[47] Silva, E. C. S., & Santos, A. S. (2020). *Uma abordagem sobre os números primos*. Multidebates, 4(5), 37–54.

[48] Sousa, R. W. O., Magno, L. C., & Chaquiam, M. (2023). *Números primos: recortes históricos e atividades para o ensino.* Anais do Seminário Nacional de História da Matemática, 15.

[49] Teles, E. B. D. S. (2024). *Novo critério de visibilidade por primos*.

[50] Torres García, R. D., & Torres Moreno, H. C. (2016). *Una caracterización de números primos en $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ desde el proceso de analizar*. Revista Electrónica Redes de Ingeniería, 7(2).

[51] Trejos Buriticá, O. I. (2016). *Algoritmo recursivo funcional para verificación y monitoreo de la densidad de números primos*. Revista Electrónica Redes de Ingeniería, 7(2).

[52] Velasco, M. P. R. (2023). *La simetría de los números*.

[53] Zamora, A. *(Referencia adicional si aplica)*.